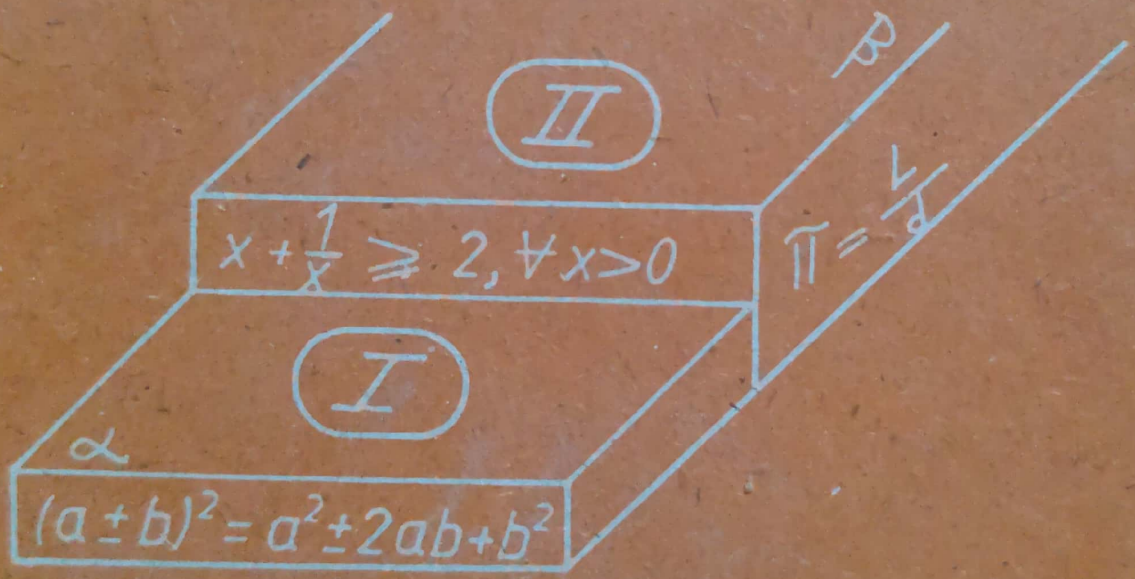
SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Prof. ADRIAN GHIOCA și Acad. NICOLAE TEODORESCU

MATEMATICA ÎN GIMNAZIU ȘI LICEU, VOL III

10

CULEGERE DE PROBLEME



Coordonator al seriei : Acad. NICOLAE TEODORESCU
Coordonator al volumului : Dr. BUCUR B. IONESCU

BUCUREȘTI 1987

Scanned with OKEN Scanner

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

Prof. ADRIAN GHIOCA și Acad. NICOLAE TEODORESCU

MATEMATICA ÎN GIMNAZIU ȘI LICEU, VOL. III

10

CULEGERE DE PROBLEME

— Subiecte date la proba de verificare pentru înscrierea în treapta I de liceu ;
— Teme pentru cercurile de elevi ;
— Probleme din reviste străine.

Coordonator al seriei : Acad. NICOLAE TEODORESCU
Coordonator al volumului : Dr. BUCUR B. IONESCU

BUCUREȘTI — 1987

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea face parte din planul de tipărituri al Ministerului Educației și Învățământului, tipărirea fiind aprobată de către Consiliul Culturii și Educației Socialiste cu nr. 13428/1986 poziția 133 și cu nr. 670/1987, poziția 208..

Referenți :

Ilie Iliescu, profesor
Elena Ioneseu, profesor
Liviu Pîrșan, profesor

CULEGERE DE PROBLEME

Coordonator al seriei : Acad. Nicolae Teodorescu
Coordonator al volumului : Dr. Bucur B. Ionescu

Coperta realizată de dr. BUCUR B. IONESCU și AUREL ROBAN

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Este prea bine cunoscut faptul că înțelegerea, însușirea, asimilarea, aprofundarea și fructificarea cunoștințelor matematice necesită rezolvarea de exerciții și probleme adecvate fiecărui capitol în parte, precum și unor sinteze a acestora. Manualele, revistele și culegerile matematice constituie tot atîtea dovezi de importanța exercițiilor și problemelor atît în învățămînt cît și în cercuri și concursuri, fiecare avînd un specific propriu. În manuale exercițiile și problemele sînt grupate pe capitole și alese în funcție de conținutul acestora și de tehnicile folosite în prezentarea cunoștințelor. În reviste exercițiile și problemele sînt cît mai variate, prezentînd aspecte și grade de dificultate foarte diverse, fără a fi condiționate în mod deliberat de programa analitică. Culegerilor de probleme le revine în special un rol metodologic, avînd posibilitatea de a sintetiza și sistematiza metode și tehnici de rezolvare, dezvoltînd pe cele din manuale și folosind varietatea celor din revistele matematice.

În acest spirit au fost concepute și alcătuite culegerile de probleme editate de Societatea de Științe Matematice din R. S. România care editează și Gazeta Matematică, revistă de largă răspîndire, de frumos prestigiu și de glorioasă tradiție. În special, caracterul metodologic a fost urmărit în Matematica în gimnaziu și liceu *vol. II, constituind* Culegere de probleme în sprijinul elevilor claselor *I—VIII (părțile I și II). Aceasta, adresîndu-se tuturor elevilor nu numai celor ce se disting prin aptitudini și preocupări deosebite, conține probleme de toate categoriile, avînd structura unui ghid metodologic. Exercițiile și problemele au caracter elementar și grade de dificultate și complexitate variate, cele cu caracter recapitulativ și de sinteză fiind de asemenea incluse în diversele capitole.*

Orientarea metodologică a culegerii a pus în evidență faptul că, deși tematica lucrării este elementară, ea este de o bogăție de idei fundamentale și de o vastitate de metode și tehnici care se cer organizate și prezentate ca atare. Aceasta, independent de cerințele imediate ale unor programe analitice, dar în strînsă legătură cu pregătirea cît mai temeinică a elevilor, în special a celor care iubesc și cultivă matematica.

De aceea, s-a considerat ca utilă și adecvată alcătuirea acestui volum III din Matematica în gimnaziu și liceu, în care sînt reunite în capitole cunoștințe bazate pe metode și tehnici speciale, care apar în diverse probleme atît în manuale, cît și în reviste, cercuri sau concursuri. Acestea, deși nu depășesc programele analitice gimnaziale, sînt utile, necesare, indispensabile chiar oricărui matematician, un loc important fiind acordat comentariilor,

Scanned with OKEN Scanner

observațiilor și sugestiilor. Ne gîndim, de exemplu, la celebrul principiu al cutiei lui Dirichlet, la proprietățile pătratelor perfecte, ale mediilor aritmetică, geometrică sau armonică. Pe aceeași linie de interes major sînt și problemele de ordonare sau de numărare, care apar în diverse mulțimi finite sau infinite. Astfel de probleme s-au pus de-a lungul veacurilor și rămîn actuale mereu, ca și cele privitoare la mulțimi și partiții ale acestora.

Întrucît culegerile se inspiră în mod obișnuit din revistele de matematică, am socotit că pe lîngă revistele noastre, și, în particular, pe lîngă Gazeta Matematică, este util să folosim și alegerea unor probleme din reviste străine. Aceasta dă posibilitatea de a ne îmbogăți sursele de informații tematice și metodologice, ca și cele de tehnici deosebite, adesea inspiratoare pentru adecvarea lor la rezolvarea unor probleme dificile tocmai din cauza lipsei unor tehnici cunoscute.

În acest mod se întregește orientarea metodologică a acestui volum care astfel capătă un specific pe care îl sperăm justificat și util unor numeroase și largi categorii de cititori din rîndurile elevilor, profesorilor și ale tuturor utilizatorilor și iubitorilor de matematică, precum și cercurilor de elevi, ca și celor ce se pregătesc pentru diverse concursuri și olimpiade.

Autorii

A. SUBIECTE DATE LA PROBA DE VERIFICARE PENTRU ÎNSCRIEREA ÎN TREAPTA I DE LICEU

Scanned with OKEN Scanner

În această secțiune am inclus enunțurile problemelor dintr-o serie de grupe de subiecte date la proba de verificare și admitere în treapta I de liceu în perioada 1977—1986, în municipiul București, precum și județele Arad, Argeș, Bacău, Bihor, Botoșani, Brăila, Călărași, Constanța, Dîmbovița, Giurgiu, Hunedoara, Ilfov, Maramureș, Mehedinți, Prahova, Sibiu, Timiș, Tulcea, Olt, Vîlcea.

Grupele anilor 1982—1986 au fost puse la dispoziție de către Inspectoratele școlare județene respective, cărora le mulțumim pe această cale, iar celelalte au fost extrase din „Gazeta Matematică", operația de selectare fiind realizată de către V. Mangu.

Scanned with OKEN Scanner

1

1. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x+a}{a+b}+\frac{2ax}{a^2-b^2}=\frac{x-a}{b-a},$$

necunoscuta fiind x, iar $a \neq b$, $a \neq -b$, $a \neq 0$.

2. Un număr de trei cifre este mai mare decît numărul obținut din aceste cifre scrise în ordine inversă cu 198. Dacă împărțim numărul dat la suma cifrelor sale obținem cîtul 48, iar dacă schimbăm ordinea ultimelor două cifre se obține un număr cu 9 mai mic decît numărul dat.

Să se afle numărul.

3. Lungimile razei și înălțimii unui con sînt $R = 9$ cm, $i = 12$ cm. Secționăm conul cu un plan paralel cu planul bazei, distanța dintre acesta și vîrful conului fiind de 8 cm. Să se afle volumul și aria laterală a conului mic care se formează.

4. Într-un trunchi de piramidă hexagonală regulată, lungimile laturilor bazei și ale muchiei sînt : $AB = 25$ cm, $A'B' = 15$ cm, $AA' = 13$ cm. Se cer : aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

(Municipiul București, iulie 1987)

2

1. Se dă expresia :

$$E(x)=\frac{\frac{1}{x^2-1}+\left(1+\frac{x-1}{2}\right):\left(\frac{x+1}{2}-1\right)}{x^2+2x+2}.$$

a). Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b). Să se reprezinte grafic funcția $f : A \to \mathbb{R}$ dată de :

$$f(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 2) \cdot E(x), \ (\forall)\, x \in A$$

și să se determine domeniul maxim de definiție A.

c). Pentru ce valori ale lui x, expresia $E(x)$, adusă la forma cea mai simplă, nu are sens ?

Scanned with OKEN Scanner

2. a). Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{3(x+y)}{2} - x + y = \dfrac{17}{2}; \\ \dfrac{x-y}{3} + \dfrac{2x-1}{4} = \dfrac{5}{12}. \end{cases}$$

b). Să se rezolve ecuația :

$$\frac{z+3(z-1)}{2} - 5z + 10\,\frac{1}{2} = 0.$$

c). Fie $A = \{x, y\}$, unde (x, y) este soluția obținută la punctul a). Fie $B = \{2, z\}$, unde z este soluția ecuației de la punctul b) și C mulțimea numerelor pare cuprinse între 3 și 7. Se cer :

$$A \cup B; \quad A \cup B \cup C; \quad A \cap B; \quad B \cap C; \quad A - B.$$

3. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 6 cm, lungimea laturii bazei mari egală cu 4/3 din cea a înălțimii și lungimea laturii bazei mici egală cu $\frac{5}{8}$ din cea a laturii bazei mari. Se cer :

a). volumul trunchiului de piramidă ;

b). volumul piramidei din care provine trunchiul ;

c). aria laterală a trunchiului de piramidă și a piramidei.

(Județul Olt, iulie 1978, licee matematică-fizică)

3

1. a). Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă expresia :

$$E(x) = \left(\frac{x^2+8}{x^3-8} + \frac{x}{x^2+2x+4} - \frac{1}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{2}{2-x}\right)$$

este $E(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

b). Să se afle valorile lui x pentru care $\dfrac{1}{x+2} \geqslant 1$.

c). Să se afle valorile lui $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x)$ ia valori întregi.

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ pentru } x \in (-\infty, 1); \\ -2x + 1, \text{ pentru } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

3. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{2x - 3y}{5} - \dfrac{2y - 3x}{11} = \dfrac{112}{55}; \\ (x - 5)^2 - (3 - y)^2 = (x - y)(x + y) - 48. \end{cases}$$

4. Un romb are diagonalele de 8 cm și 6 cm. Să se afle volumul și aria corpului obținut prin rotirea completă a rombului în jurul unei laturi.

5. O piramidă $SABC$ are muchiile laterale congruente și perpendiculare între ele ($SA \perp SB$; $SB \perp SC$; $SC \perp SA$). Știind că $SA = SB = SC = 3\sqrt{2}$ cm, să se determine aria totală și volumul piramidei.

(Municipiul București, iulie 1979)

4

1. Rezolvați ecuația :

$$a(x - a) = m(x - m),$$

analizînd toate cazurile posibile (a și m fiind parametri reali).

2. Raționalizați numitorul fracției :

$$\frac{7}{\sqrt{20} - 4}.$$

3. Pe planul unui triunghi echilateral ABC se ridică perpendicularele $[AA']$ și $[BB']$. Se știe că $BB' = a$. Să se găsească AA' astfel încît triunghiul $A'B'C$ să fie isoscel cu $A'B' = A'C$.

4. Un con se desfășoară pe un plan după un semicerc cu diametrul de 20 cm. Să se afle volumul conului.

(Județul Dîmbovița, iulie 1984)

5

1. Fie :

$$E(x) = \frac{18}{x^2 - 9} - \frac{x}{x + 3} + \frac{4}{3 - x}.$$

a). Să se aducă $E(x)$ la forma cea mai simplă.
b). Determinați valorile lui x pentru care $E(x) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Jumătate din lungimea înălțimii unui con întrece cu 1 cm a treia parte a lungimii razei cercului de bază, iar suma dintre lungimea razei și cea a înălțimii este 7 cm.

a). Să se afle aria laterală și volumul conului.

b). La ce distanță de vîrful conului trebuie făcută o secțiune cu un plan paralel cu baza conului, astfel ca suprafața laterală a acestuia să fie împărțită în două suprafețe de aceeași arie?

3. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată se cunosc lungimea laturii bazei mari $L = 12$ cm, lungimea laturii bazei mici $l = 0{,}6$ dm și volumul trunchiului $\mathcal{V} = 63\sqrt{3}$ cm^3.

a). Să se afle: înălțimea, apotema, muchia, precum și aria laterală a trunchiului de piramidă.

b). Să se afle înălțimea piramidei din care face parte trunchiul de piramidă.

c). Să se determine distanța de la punctul O, centrul cercului circumscris bazei mari, la fețele trunchiului de piramidă.

(Județul Bacău, iulie 1982)

6

1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{2y}{3} = \dfrac{5}{2}; \\ \dfrac{3x}{2} + 2y = 0. \end{cases}$$

2. Fie polinomul $P(X) = X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8$.

a). Să se arate că $P(X)$ este divizibil cu polinoamele $Q(X) = X - 2$ și $R(X) = X + 2$.

b). Folosind, eventual, rezultatul de la punctul a), să se simplifice fracția:

$$F(X) = \frac{X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8}{(X^2 - 4)(X^2 + 4)}.$$

c). Să se rezolve ecuația $F(x) = 1$.

3. Într-o piramidă triunghiulară $ABCD$, muchia $[CD]$ este perpendiculară pe planul bazei ABC. Se dau:

$$AB = CD = 4 \text{ cm}; \quad AC = 3 \text{ cm}; \quad BC = 5 \text{ cm}.$$

a). Să se afle aria totală și volumul piramidei.

b). Secționînd piramida cu un plan paralel cu planul bazei la $1/2\ DC$, să se afle volumul trunchiului de piramidă obținut.

(Județul Vîlcea, iulie 1978, licee pedagogice)

Scanned with OKEN Scanner

1. a). Calculaţi :

$$\frac{X^2-Y^2}{4XY}:\frac{X-Y}{2Y}.$$

b). Rezolvaţi ecuaţia :

$$2(x-1)=3x+3.$$

c). Descompuneţi în factori polinoamele :

$$X^2-16\ ;\ X^3+1\ ;\ X^3-4X^2+4X.$$

2. a). Rezolvaţi ecuaţia :

$$\frac{x-m}{x-1}+\frac{x-1}{x-m}+2=0,$$

unde m este un parametru real ;

b). Simplificaţi fracţia.

$$\frac{X^2-7X+12}{X^2-5X+6}.$$

3. Enunţ identic cu cel de la problema nr. 3, setul 2 (v. pag. 8).

4. Într-un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$ se consideră trei feţe, care au un punct comun. Dacă aceste feţe sînt dreptunghiuri congruente, să se arate că paralelipipedul este cub.

(Municipiul Bucureşti, iulie 1982)

1. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=0,7;\\[2ex] \dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{y}=0,5.\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

2. a). Să se simplifice fracția :

$$F(X) = \frac{2X^2 - 10X + 12}{X^2 - 4X + 5};$$

b). Să se determine $x \in \mathbb{Q}$ astfel încît $F(x) \in \mathbb{Z}$.

3. Aria totală a unui cilindru circular drept este 132π cm², iar cea laterală 96π cm². Să se afle volumul cilindrului.

4. O piramidă are muchiile laterale congruente și acestea formează cu planul bazei unghiuri a căror măsură este 45°. Baza este un trapez isoscel cu unghiurile ascuțite de măsură 60° și bazele de 6 cm și, respectiv, 8 cm.

Să se calculeze :

a). raza cercului circumscris trapezului isoscel ;

b). volumul piramidei.

(Județul Timiș, iulie 1983)

9

1. Să se rezolve ecuația :

$$(2x - 1)(2x + 1) - (x - 2)^2 = 3(x + 1)^2 - 10.$$

2. Să se rezolve sistemul de inecuații :

$$\begin{cases} 2x > 4x - 6 ; \\ 4x + 3 \geq 3x + 1. \end{cases}$$

3. Să se efectueze :

$$\left(\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1} - 1\right) : \left(\frac{4}{a^2 - 1} + 1\right).$$

4. Să se determine o fracție știind că dacă la numărător se adună 1 aceasta devine echiunitară, iar dacă se adaugă 2 la numitor se obține 1/2.

5. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei de 16 cm și înălțimea de 6 cm. La jumătatea înălțimii se consideră un plan paralel cu baza. Să se afle :

a). aria laterală și volumul piramidei ;

b). aria laterală și volumul trunchiului de piramidă obținut prin secționare.

(Județul Prahova, iulie 1979)

10

1. Să se calculeze :

$$\sqrt{45} : \sqrt{5}; \quad \sqrt{\frac{a^2}{b}} : \sqrt{\frac{a}{b^2}}, \quad a, b > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

2. Să se rezolve ecuația :

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

3. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{1}{2}(2x - 1) + \frac{1}{4}(4x - 1) + \frac{1}{8}(8x - 1) + \frac{1}{8} = 2x.$$

4. Enunț identic cu cel de la problema nr. 3, setul 2 (v. pag. 8).

5. Un con circular drept are diametrul bazei de 12 cm și înălțimea egală cu 2/3 din lungimea diametrului. La ce distanță de vîrful conului trebuie făcută o secțiune printr-un plan paralel cu baza, astfel încît lungimea cercului de secțiune să fie 9π?

(Județul Mehedinți, iulie 1984)

11

1. Care funcție pătratică are graficul o parabolă ce conține punctele $A(1 ; 4)$, $B(2 ; 3)$, $C(3 ; 4)$?

2. Efectuați :

$$\left(\frac{X^2 - X}{X^2 + 1} + \frac{2X^2}{X^3 - X^2 + X - 1}\right) : \frac{X^2}{X^2 - 1}.$$

3. Arătați că oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{R}$, $m \neq n$, ecuația :

$$(m - n)x^2 + 2(n - p)x + p - m = 0$$

are soluții în $\mathbb{R}$.

Ce se întîmplă dacă $m = n$?

4. Fie $ABCD$ un romb cu latura de lungime a și $m(\sphericalangle A) = 60°$. În punctul A se ridică perpendiculara d pe planul (ABC), pe care se ia segmentul $[AM]$ de lungime $\frac{3a}{2}$.

Să se afle :

a). volumul prismei drepte care are ca bază rombul $ABCD$ și înălțimea de lungime egală cu lungimea segmentului $[AM]$;

b). ce puteți spune despre măsura unghiului format de planele (ABC) și (BMA)? Enunțați teorema pe care ați aplicat-o!

c). măsura unghiului plan al diedrului format de planele (ABC) și (BMD);

d). distanța de la punctul M la dreapta BC;

e). volumul piramidei cu vîrful B și baza triunghiul AMD.

5. Un trunchi de con circular drept, ale cărui generatoare fac cu planul bazei unghiuri cu măsura $45°$, este circumscris unei sfere cu raza $R = 3$ cm. Să se calculeze razele bazelor și aria laterală a trunchiului de con.

(Județul Hunedoara, iulie 1982)

12

1. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{2}{x-y}; \\ \dfrac{2}{3x+7y} = \dfrac{3}{2x-9}. \end{cases}$$

2. Pentru ce valori întregi ale lui x, numărul:

$$E(x) = \frac{2x+3}{2x+9}$$

este întreg?

3. Să se afle valoarea parametrului real a astfel încît ecuația:

$$(4-x)^2 - ax + \frac{12}{x} = 0$$

să admită soluția $x = 2$.

4. Să se afle aria și volumul unei sfere știind că lungimea razei acesteia este media aritmetică a numerelor 2 și 8.

5. Un triunghi dreptunghic ABC are lungimile catetelor $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara pe planul triunghiului pe care se consideră punctul V așa ca $AV = 2{,}4$ cm.

Să se afle:

a). volumul tetraedrului $VABC$;

b). aria totală a tetraedrului $VABC$;

c). măsura unghiului diedru format de planele (VBC) și (ABC).

(Județul Sibiu, iulie 1984)

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

13

1. Se dă expresia :

$$E(a) = \frac{1}{a^2 + 2a + 1} - \frac{a^2 + a}{a^3 - 1}\left(\frac{1}{a^2 - a} + \frac{a}{a^2 - 1}\right).$$

a). Să se aducă $E(a)$ la forma cea mai simplă.

b). Dacă $E(a) = \frac{-4a}{(a^2 - 1)^2}$, să se calculeze $E\left(-\frac{3}{2}\right)$.

2. a). Să se rezolve ecuația :

$$\frac{2x^2 - mx + m}{x - 3} = 2x - 4,$$

unde $m \in \mathbb{R} - \{9, 10\}$.

b). Dacă $x = \frac{12 - m}{10 - m}$, să se determine valorile întregi ale lui m pentru care x este un număr întreg pozitiv, negativ sau nul.

3. Să se determine mulțimea valorilor lui x care verifică sistemul :

$$\begin{cases} \frac{x - 4}{2} + 2 > \frac{x - 3}{3}; \\ \frac{x + 1}{3} - \frac{x + 4}{2} > -\frac{7}{3}. \end{cases}$$

4. În piramida patrulateră $VABCD$ cu baza un romb și înălțimea VO (O fiind intersecția diagonalelor rombului) se cunosc : lungimea diagonalei mici a rombului $AC = 6$ m, lungimea diagonalei mari a rombului $BD = 8$ m și cea a înălțimii piramidei $VO = 1$ m.

Să se determine volumul și aria totală a piramidei.

5. Un trapez $ABCD$ are bazele $[AB]$ și $[CD]$ de 30 cm, respectiv 15 cm, iar laturile neparalele $[BC]$ și $[DA]$ de 12 cm și 9 cm. Să se determine aria totală a corpului obținut prin rotația trapezului în jurul dreptei BC.

6. Un vapor parcurge o distanță în sensul curentului apei în 4 ore, iar împotriva curentului, aceeași distanță, în 4 ore și 20 minute.

În cîte ore parcurge distanța respectivă o plută care se deplasează cu viteza apei ?

(Municipiul București, iulie 1977)

14

1. Se dă ecuația :

$$\frac{x + a + 1}{x + a} = \frac{x + a - 1}{x - a} - \frac{a^2 + 1}{x^2 - a^2}.$$

a). Pentru ce valoare a lui a ecuația admite rădăcina $x = 4$?

b). Pentru ce valoare a lui x ecuația în a are rădăcina $a = 5$?

15

2. Să se descompună în factori :

$$E_1 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2;\ E_2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2;$$
$$E_3 = (c^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2$$

și să se arate că $E_1 = E_2 = E_3$.

3. O piramidă are ca bază un romb cu diagonalele de 10 cm și, respectiv, 18 cm, iar înălțimea trece prin centrul bazei. Volumul piramidei este de 360 cm³. Se cer lungimile muchiilor piramidei.

4. Lungimile razei și generatoarei unui con sînt $R = 20$ cm, $G = 52$ cm. Secționăm conul cu un plan paralel cu baza astfel încît secțiunea să fie un con cu raza de 15 cm. Să se afle aria laterală și volumul conului mic ce se formează astfel.

(Județul Constanța, iulie 1979)

15

1. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{1}{2} - \frac{5x-4}{4} = \frac{1}{2}x - 1 - \frac{x+1}{3}.$$

2. a). Să se afle funcția liniară $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(2)=5$ și $f(-1)=2$.

b). Să se afle coordonatele punctelor în care graficul funcției f intersectează axele de coordonate.

3. Fie ecuația $x^2 - 6x + 2m - 1 = 0$.

a). Să se rezolve ecuația pentru $m = 3$.

b). Care este cea mai mare valoare a lui m pentru care ecuația are rădăcini reale?

4. Lungimile laturilor bazei unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ sînt $AB = 12$ cm și $BC = 5$ cm, iar aria laterală a acestuia este 408 cm².

a). Să se calculeze volumul paralelipipedului.

b). Să se afle aria secțiunii diagonale.

c). Să se afle măsura unghiului diedru format de planul (BCA') cu planul bazei.

5. Un con circular drept are raza bazei de 15 cm și înălțimea de 36 cm.

a). Să se calculeze aria totală a conului.

b). La ce distanță de vîrf trebuie făcută o secțiune paralelă cu baza astfel ca generatoarea trunchiului de con obținut să aibă lungimea de 26 cm?

c). Să se calculeze raportul volumelor celor două conuri.

(Județul Bacău, iulie 1983)

16

1. Să se determine funcția liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care $f(1) = 10$ și $f(2) = -4$.

2. a). Să se simplifice fracția :

$$\frac{6XZ - 4YZ - 21X + 14Y}{3X - 2Y}.$$

b). Să se efectueze :

$$\left(\frac{3}{2X-1}+\frac{7}{2X+1}+\frac{20X-4}{1-4X^2}\right):\frac{2}{X+1}\cdot$$

3. Fie ecuaţia :

$$(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=0,\ a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Poate avea această ecuaţie soluţii reale dacă $a\neq b\neq c\neq a$?

Scrieţi ecuaţia de gradul al II-lea, în forma canonică, echivalentă cu aceasta şi arătaţi apoi că :

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc.$$

4. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm şi înălţimea de 24 cm.

a). Să se determine volumul şi aria totală a trunchiului de con.

b). Să se calculeze volumul conului din care provine trunchiul de con.

c). Să se calculeze raza sferei circumscrise conului din care provine trunchiul de con.

5. Enunţaţi o reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare.

(Judeţul Tulcea, iulie 1984)

17

1. Se consideră fracţiile raţionale :

$$F_1(X)=\frac{X^3-2X^2+X-2}{X^2-4X+4};$$

$$F_2(X)=\frac{-X}{6-3X};\quad F_3(X)=\frac{-17}{3X-6}\cdot$$

a). Să se rezolve ecuaţiile :

$$x^2-4x+4=0;\ 6-3x=0.$$

b). Determinaţi valorile x cu care se poate înlocui nedeterminata X astfel încît fracţiile F_1, F_2, F_3 să fie definite.

c). Efectuaţi adunarea :

$$F_1(X)+F_2(X)+F_3(X).$$

d). Să se traseze graficul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dată de relaţia :

$$f(x)=\frac{3x+7}{3}\cdot$$

2. Să se afle aria totală şi volumul corpului obţinut prin rotirea unui romb cu latura de 5 cm şi un unghi cu măsura 60°, în jurul unei laturi.

3. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC ($m(\sphericalangle A)=90°$). În B se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului, pe care se ia un punct V, astfel încît $VB=AB=AC$ şi $VB=a$.

Să se afle :

a). volumul piramidei $VABC$;

b). aria laterală a piramidei $VABC$.

1. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + ay = 2, \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$ și să se precizeze soluțiile în cazul $a = -2$.

(Județul Călărași, iulie 1982)

18

1. Se dă expresia :

$$E(a) = \left(\frac{3a+2}{3a^2+1} - \frac{18a^3 - a - 9}{9a^4 - 1} + \frac{3a-2}{3a^2-1} \right) : \frac{a^2+10a+25}{9a^4-1},$$

a). Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b). Pentru ce valori ale lui a expresia adusă la forma cea mai simplă nu are sens ?

c). Să se determine valorile lui a pentru care $E(a)$ este pozitivă.

d). Să se determine valorile întregi ale lui a pentru care $E(a)$ este un număr întreg.

2. Într-un cilindru circular drept, raza bazei este de 2 cm, iar înălțimea de 7 cm. Să se determine :

a). volumul cilindrului ;

b). aria laterală a cilindrului ;

c). aria totală a cilindrului ;

d). lungimea razei unui cerc a cărui arie este echivalentă cu aria totală a cilindrului.

(Județul Sibiu, iulie 1979)

19

1. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{7}{24} - \frac{13}{15} : \left(\frac{2x}{3} + \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{4}; \quad x \neq -\frac{6}{5},$$

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia :

$$E(a, b) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{2a-b}{a^2+ab},$$

unde $a \neq 0$, $a \neq -b$, și să se determine valoarea expresiei pentru $a = 3$ și $b = -1$.

3. Un trapez isoscel cu baza mare de 20 cm, înălțimea de 4 cm și una din laturile neparalele de 5 cm se rotește în jurul bazei mari. Să se calculeze aria și volumul corpului astfel generat.

Scanned with OKEN Scanner

4. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat, cu diagonala de $6\sqrt{2}$ cm. Să se calculeze volumul și aria laterală a cilindrului.

(Județul Maramureș, iulie 1979)

20

1. Se dă expresia :

$$E(x) = \left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 1\right] \cdot \frac{(x+3)^3}{16x^2}.$$

a). Să se aducă la forma cea mai simplă.

b). Să se arate că expresia $F(x) = 4(x+2)\,E(x)$ se divide cu 2, pentru orice x număr natural.

2. Să se determine parametrul real a, astfel încît punctul $A(4, -2)$ să aparțină graficului funcției $f : [-2, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.

Pentru $a = -6$, să se reprezinte grafic funcția f.

3. Un triunghi dreptunghic ABC cu catetele de lungimi $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm se rotește complet în jurul perpendicularei dusă prin punctul C, pe cateta $[AC]$.

Să se calculeze aria totală și volumul corpului astfel obținut.

21

1. Să se simplifice fracția :

$$\frac{4X^2 - 1}{2X^2 - 3X + 1}.$$

2. Să se rezolve ecuația :

$$\sqrt{x - 4} = x - 4.$$

3. Enunț identic cu cel de la problema nr. 1, setul 8 (v. pag. 11).

4. Fie ecuația $x^2 - 7x + 5 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2. Fără a rezolva ecuația, să se calculeze :

$$x_1^2 + x_2^2;\ x_1^3 + x_2^3.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de $6\sqrt{3}$ m, latura bazei mici de $2\sqrt{3}$ m și muchia laterală de 5 m. Să se calculeze aria laterală, aria totală și volumul trunchiului.

6. Să se afle volumul unui cilindru circular drept, înscris într-o prismă triunghiulară regulată, care are latura bazei de $4\sqrt{3}$ dm și înălțimea de 10 dm.

(Județul Vîlcea, iulie 1982)

22

1. a). Efectuați :

$$3X^2 - 3X + 5 - (2X^2 - 3X + 4).$$

b). Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6; \\ -x + y = -1. \end{cases}$$

2. a). Să se rezolve ecuația :

$$5(x - 1) = 4(3 - x) + 7.$$

b). Să se calculeze :

$$(3^3 \cdot 3^{-2} + 4^4 \cdot 4^{-3} + 1) \cdot 2^{-3}.$$

3. Enunț similar cu cel de la problema nr. 4, setul 16 (v. pag. 17).

4. Să se rezolve ecuația :

$$(m + 1)x + a = x,$$

unde a și m sînt parametri reali.

5. O piramidă are muchiile laterale congruente și ele formează cu planul bazei unghiuri cu măsura 45°. Baza este un trapez isoscel cu unghiurile ascuțite de măsură 60°, iar bazele de 6 cm și 8 cm.

Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza care împarte înălțimea în două părți congruente. Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă obținut.

(Municipiul București, iulie 1984)

23

1. Aflați restul împărțirii polinomului $X^3 + 3aX + a - 1$ la binomul $X - a$, știind că prin împărțirea la $X - 3$ dă restul 5.

2. Reprezentați într-un sistem de coordonate dreapta soluțiilor ecuației :

$$-2x + 5y = 12.$$

Scanned with OKEN Scanner

3. Să se efectueze :

$$\left(-\frac{1}{25}\right)^4 : \left(-\frac{1}{15}\right)^3 .$$

4. Fie planul α și A un punct exterior acestuia. Care este locul geometric al mijlocului segmentului $[AB]$ atunci cînd B parcurge α?

5. Un con circular drept are raza de 12 cm. La ce distanță de vîrful conului trebuie făcută o secțiune, paralelă cu baza, astfel ca raza secțiunii să fie de 6 cm?

(Județul Dîmbovița, iulie 1983)

24

1. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{(x-1)^2}{4} = x - 2.$$

2. Două triunghiuri sînt asemenea. Primul are laturile de 7 cm, 10 cm și 11 cm, iar al doilea are perimetrul de 70 cm.

Să se afle lungimile laturilor celui de-al doilea triunghi.

3. Să se efectueze :

$$\left(\frac{X^2 - X}{X^2 + 1} + \frac{2X^2}{X^3 - X^2 + X - 1}\right) : \frac{X^2}{X^2 - 1} .$$

4. Să se determine aria și volumul unui tetraedru regulat, cu muchia de lungime a.

5. Un con circular drept are raza bazei de 9 cm și înălțimea de 20 cm.

a). Să se calculeze aria laterală și volumul conului.

b). La ce distanță de vîrf trebuie dus un plan paralel cu baza astfel încît raza cercului de secțiune să fie de 6 cm?

(Județul Timiș, iulie 1984)

25

1. a). Să se simplifice fracția :

$$F = \frac{X^2 - 5X + 6}{X^2 - 4X + 3} .$$

b). Să se arate că, după simplificare, fracția obținută se poate scrie sub forma :

$$F = 1 - \frac{1}{X - 1} .$$

Scanned with OKEN Scanner

2. a). Să se verifice că :

$$\frac{1}{X+1}+\frac{1}{X+2}=\frac{2X+3}{X^2+3X+2},$$

b). Folosind egalitatea anterioară, efectuaţi înmulţirea :

$$\frac{4X+6}{2X^2+6X+4}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{1}{X+2}\right),$$

punînd rezultatul sub forma unei diferenţe de două pătrate.

3. a). Să se rezolve ecuaţia :

$$\sqrt{x}=6-x$$

şi să se verifice soluţiile găsite.

b). Fără a rezolva ecuaţia, folosind numai definiţia şi condiţiile de existenţă ale radicalului, să se arate că :

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=-5$$

nu are soluţii numere reale.

4. Într-o piramidă patrulateră regulată dreaptă, latura bazei şi înălţimea sînt de 12 cm, respectiv 8 cm.

Să se calculeze aria laterală şi volumul corpului.

5. Într-un con circular drept, unghiul dintre o generatoare şi înălţime are măsura 30°. Ştiind că generatoarea este de 8 cm, să se calculeze aria laterală a corpului.

6. Pe cercul $\mathscr{C}(O, R)$, cu $R=6$ cm, se consideră două puncte A şi B astfel încît măsura arcului subîntins de coarda $[AB]$ să fie 90°. În O se ridică perpendiculara pe planul cercului, pe care se consideră punctul M, aşa ca $OM=6$ cm. Să se calculeze distanţa de la M la dreapta AB.

(Judeţul Giurgiu, iulie 1982)

26

1. Să se efectueze :

$$\left(\frac{1}{2x-y}+\frac{3y}{y^2-4x^2}+\frac{2}{2x+y}\right):\left(\frac{4x^2+y}{4x^2-y^2}+1\right).$$

2. Este posibil ca lungimile laturilor triunghiului ABC, dreptunghic în A, să aibă expresiile :

$$AB=x+1;\ AC=x\sqrt{3};\ BC=2x-3?$$

Justificaţi răspunsul!

3. O piramidă patrulateră regulată, cu latura bazei de 4 cm, are toate feţele laterale triunghiuri echilaterale. Să se calculeze aria totală şi volumul corpului considerat.

(Judeţul Ilfov, iulie 1979)

27

1. Să se efectueze :

$$\left[\left(\frac{1+b}{1-b}-2+\frac{1-b}{1+b}\right):\frac{4b}{1-b}+a\right]:\frac{1}{1+b}.$$

2. Fie f şi g două funcţii polinomiale de gradul întîi.

a). Să se determine f şi g ştiind că :

$$\begin{cases} 2f(x+1)+g(x-1)=2x+14, \\ f(x+1)-2g(x-1)=6x-18, \end{cases} \qquad (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

b). Să se reprezinte grafic $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin $f(x)=2x$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, $g(x)=-2x+8$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$, apoi să se determine coordonatele punctului de intersecţie a celor două grafice, dacă acest punct există.

3. Fie o piramidă $VABC$ cu baza triunghiul isoscel ABC şi înălţimea de 9 cm.

a). Dacă un unghi exterior al triunghiului ABC are măsura 120° şi $AB=12$ cm, să se calculeze volumul piramidei.

b). Dacă un unghi exterior al triunghiului ABC are măsura 150° şi $AB=12$ cm, să se calculeze volumul piramidei pentru toate cazurile posibile.

4. Un coş de fabrică în formă de trunchi de con, înalt de 30 m, are diametrul exterior la bază de 3,6 m, iar la vîrf 2,4 m.

Interiorul coşului are formă de cilindru drept cu diametrul de 1,6 m.

Să se afle masa coşului, ştiind că un metru cub de zidărie cîntăreşte 1 800 kg.

(Judeţul Arad, iulie 1979)

28

1. Se dau expresiile :

$$E_1(x)=\frac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{1-x^2}}:\frac{x}{5},$$

$$E_2(x)=\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x-3}{x}-1\right):\frac{x^2-3x+9}{3x}.$$

Se cer :

a). să se aducă expresiile $E_1(x)$ și $E_2(x)$ la o formă mai simplă ;

b). pentru ce valori ale lui x expresiile $E_1(x)$ și $E_2(x)$ nu au sens ?

c). să se rezolve ecuația :

$$(E_1(x) - E_2(x)) : \frac{2E_1(x)}{5} = -1.$$

d). Pentru ce valori ale lui x avem inegalitatea :

$$[E_1(x) + E_2(x)] : \frac{2}{x-3} \geqslant 0 \,?$$

e). Să se reprezinte grafic funcția $f : A \to \mathbb{R}$, definită prin :

$$f(x) = \frac{1}{E_1(x)} + \frac{1}{E_2(x)}, \ (\forall)\, x \in A$$

și să se determine A maxim (în raport cu relația de incluziune din $\mathbb{R}$).

2. Un trapez isoscel are latura neparalelă de aceeași lungime cu baza mică, egală cu a, iar măsura unghiului ascuțit 45°.

Se cer :

a). să se afle aria trapezului ;

b). să se afle aria corpului obținut prin rotirea completă a trapezului în jurul laturii neparalele ;

c). să se afle volumul corpului de rotație obținut.

(Județul Olt, iulie 1978, licee sanitare)

29

1. Într-o sferă cu raza $R = 5$ m se înscrie un con cu înălțimea $h = 8$ m. Să se afle :

a). aria și volumul sferei ;

b). aria și volumul conului.

2. Enunț identic cu cel de la problema nr. 5, setul 12 (v. pag. 14).

3. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 2 \ ; \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 2. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se verifice soluția sistemului.

4. Să se rezolve ecuația :

$$(x+1)^2 = x+1.$$

5. Găsiți o funcție de gradul I al cărei grafic să fie segmentul $[AB]$, unde $A(2, -5)$, $B(5, 2)$.

(Județul Mehedinți, iulie 1983)

30

1. Împărțind polinomul $2mX^3 - mX^2 + nX - 16$ la $X-3$ și $X+1$ obținem, în ambele cazuri, restul -2.

Ce rest vom obține dacă-l vom împărți la $X-1$?

2. Să se rezolve ecuațiile :

a). $(x+5)^2 = 3(x+2)^2 + 13$;

b). $\dfrac{4x-3}{x-4} = x+12$;

c). $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{12}$.

3. Enunț identic cu cel de la problema nr. 3. setul 29 (v. pag. 24).

4. Enunț similar cu cel de la problema nr. 4, setul 16 (v. pag. 17).

31

1. a). Să se rezolve ecuația :

$$\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{5x-4}{4}.$$

b). Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} (x-2)^2 + 3 \geqslant (x+3)(x-3); \\ 2(3-7x) < (10\,(1-x) + 8. \end{cases}$$

2. Se dă expresia :

$$E(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{(x-1)(x+2)}.$$

a). Să se simplifice $E(x)$;

b). Să se afle valoarea numerică a expresiei date, pentru $x = \sqrt{2}+1$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Un trunchi de con circular drept are aria laterală de 50π cm² și generatoarea de 50 mm. Știind că raportul lungimilor razelor trunchiului este $\frac{3}{7}$, să se calculeze:

a). aria totală a conului și aria secțiunii axiale;

b). raza cilindrului circular drept, care are volumul $\frac{75}{79}$ din volumul trunchiului și înălțimea congruentă cu înălțimea trunchiului.

4. O piesă metalică în formă de trunchi de piramidă patrulateră regulată are suma lungimilor tuturor muchiilor de 1 400 mm, iar laturile bazelor de 6 cm și, respectiv, 16 cm.

a). Ce cantitate de vopsea este necesară pentru vopsirea acestei piese, dacă pentru fiecare 0,01 dm² de suprafață se folosesc 2 g de vopsea?

b). Care este masa piesei după vopsire, dacă densitatea metalului din care este făcută piesa este 7,8 g/cm³?

(Județul Bacău, iulie 1984)

32

1. Fie ecuația $x^2 - 10x + m + 3 = 0$. Care este cea mai mare valoare a lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuația are soluții reale? Rezolvați-o în acest caz!

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} xy = 6; \\ \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{15}{6}. \end{cases}$$

3. Să se efectueze:

$$\frac{3X}{(X-2Y)^2} + \frac{2X+Y}{(X+Y)(X-2Y)} - \frac{5}{X+Y}.$$

4. Un con circular drept are $r = 6$ cm și $G = 10$ cm.

a). Să se afle aria și volumul conului.

b). Să se afle aria și volumul sferei circumscrise conului.

5. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu baza pătratul $ABCD$, înălțimea este de 3 cm, iar dreptunghiul $ABB'A'$ are aria de 21 cm².

Să se afle dimensiunile paralelipipedului și lungimile diagonalelor acestuia.

(Județul Vîlcea, iulie 1983)

Scanned with OKEN Scanner

33

1. Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} 3x + 4z = 47 ; \\ 2y - 5z = -34 ; \\ 2x + y - z = 5. \end{cases}$$

2. Știind că :

$$5a^2 - 13ab + 6b^2 = 0,$$

să se afle valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

3. Să se efectueze :

$$\frac{X^2 + Y^2}{XY} - \frac{X^2}{XY + Y^2} - \frac{Y^2}{XY + X^2} - \frac{X^2 - Y^2}{X^2 + 2XY + Y^2} : \frac{X - Y}{X + Y}.$$

4. Un con circular drept are raza bazei de 8 cm și înălțimea de 16 cm. Acesta se secționează cu un plan paralel cu planul bazei, determinînd, astfel, un trunchi de con, cu înălțimea de 12 cm.

a). Să se calculeze volumul trunchiului de con format.

b). Să se determine la ce distanță de planul bazei trebuie să se facă o secțiune în con, printr-un plan paralel cu baza, astfel ca ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

5. Să se enunțe teorema celor trei perpendiculare.

(Județul Tulcea, iulie 1983)

34

1. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{1 - 36x^2}{6x + 1} \cdot \frac{1 - 6x}{0{,}25(4x^2 - 16)} : \frac{1 - 12x + 36x^2}{x - 2} = 1,$$

2. Să se afle valorile întregi ale lui y pentru care expresia $E(y) = \frac{3y - 7}{2 - 5y}$ este pozitivă.

3. Lungimea razei unui con circular drept este de patru ori mai mare decît 0,(3) din cea a înălțimii acestuia, iar diferența dintre lungimile razei și înălțimii conului este 2 cm. La $\frac{2}{3}$ din înălțime față de baza conului, se face o secțiune paralelă cu baza. Să se afle :

a). raza și înălțimea conului ;

b). generatoarea conului ;

Scanned with OKEN Scanner

c) raza, înălțimea și generatoarea conului obținut în urma secțiunii;

d). raportul ariilor laterale ale corpurilor formate: con și trunchi de con;

e). cît la sută reprezintă aria laterală a conului din aria laterală a trunchiului de con?

(Județul Sibiu, iulie 1978, licee pedagogice)

35

1. Cînd o expresie algebrică nu poate avea sens?
2. Care dintre expresiile următoare sînt raționale:

$$\frac{-8m-2n^2}{7};\ 8g-4h;\ \frac{-x^3+5x}{2};\ \frac{7}{3}-\frac{4}{x}+\frac{x^2+x}{5};$$

$$32y+9i;\ \frac{2x+y}{7xy};\ \frac{x}{y}+y?$$

3. Se dă expresia:

$$E=\frac{1-\dfrac{4x}{(x+1)^2}}{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{x^2-1}}$$

și se cer:

a). să se aducă expresia la forma cea mai simplă;

b). să se arate că această expresie nu poate avea valoarea 1, pentru nici o valoare a lui x.

4. O piramidă are ca bază un triunghi ABC. Lungimile laturilor acestui triunghi sînt proporționale cu numerele 12, 16, 20, iar diferența dintre lungimea laturii cea mai mare și lungimea laturii cea mai mică este de 2 cm; înălțimea piramidei este cu $\frac{5}{6}$ cm mai mare decît cea a triunghiului de bază, relativă la latura cea mai mare a acestuia. Se face o secțiune paralelă cu baza piramidei, al cărui perimetru este de 0,04 m. Să se calculeze:

a). lungimile laturilor triunghiului de bază al piramidei;

b). lungimile laturilor triunghiului de secțiune făcută în piramidă;

c). înălțimea triunghiului de bază, relativă la latura cu cea mai mare lungime;

d). volumul piramidei inițiale;

e). cît la sută reprezintă lungimea laturii cea mai mică a triunghiului de bază din lungimea laturii cea mai mică a triunghiului de secțiune?

(Județul Olt, iulie 1978, licee pedagogice)

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

36

1. a). Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se formeze ecuația de gradul al doilea ce are rădăcinile $\frac{2a+b}{4}$ și $\frac{2a-b}{4}$.

b). Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{5} - \dfrac{2y-3x}{11} = \dfrac{112}{55}; \\ (x-5)^2 - (3-y)^2 = (x-y)(x+y) - 48. \end{cases}$$

2. Se dă fracția:

$$F(X) = \frac{X^3 - 8}{\dfrac{(X+2)^3 + X^3}{4}}.$$

a). Să se aducă $F(X)$ la forma cea mai simplă.

b). Să se determine $x \in \mathbb{N}$, astfel încît $F(x) \in \mathbb{Z}$.

3. Într-o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu muchia bazei de 8 cm, se duce, prin mijlocul muchiei $[VA]$, un plan paralel cu planul triunghiului VBD.

Știind că muchiile piramidei sînt congruente cu diagonala bazei, să se calculeze:

a). aria laterală și volumul piramidei;

b). aria secțiunii determinată în piramidă.

4. Dintr-o piesă uzată, în formă de con circular drept, cu raza bazei de 2 dm și înălțimea de $2\sqrt{2}$ dm, se taie un corp în formă de cub, de volum maxim, cu una din fețe inclusă în baza conului.

Să se arate că, în felul acesta, se folosește mai puțin de un sfert din material.

(Județul Timiș, iulie 1982)

37

1. Să se rezolve ecuațiile:

a). $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x}{3}$; b). $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = 0$.

2. Fie dat polinomul:

$$f = X^3 - 6X^2 + 11X - 6.$$

a). Să se calculeze $f(1)$.

b). Să se descompună polinomul dat într-un produs de trei polinoame de gradul 1.

3. Să se reprezinte grafic $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } x < -1 ; \\ x^2 & , \text{ dacă } -1 \leqslant x < 1 ; \\ x-1, & \text{ dacă } x \geqslant 1. \end{cases}$$

4. O piramidă patrulateră are toate feţele laterale triunghiuri echilaterale. Ştiind că lungimile laturilor unor astfel de triunghiuri sînt de 6 cm, să se calculeze :

a). aria şi volumul corpului ;

b). măsura unghiului format de două dintre muchiile opuse.

5. Un con se desfăşoară pe un plan, după un semicerc cu diametrul de 20 cm. Să se calculeze :

a). aria şi volumul conului ;

b). măsura unghiurilor secţiunii determinate în con de un plan care trece prin vîrful acestuia şi prin centrul bazei sale.

(Judeţul Giurgiu, iulie 1983)

38

1. Să se rezolve ecuaţiile :

a). $x^2 - 6x + 5 = 0$;

b). $\dfrac{x^2 - 6x}{x - 5} = \dfrac{5}{5 - x}$.

2. Fie polinoamele :

$$P(X) = X^3 - 2X^2 - 4X - 5 ; \; Q(X) = [(X - 2)X - 4]X - 5.$$

Să se calculeze :

$$P(-1) ; \; P(0) ; \; P(1) ;$$

$$Q(-1) ; \; Q(0) ; \; Q(1).$$

Ce se observă? De ce?

3. Să se determine toate numerele reale, egale cu pătratul lor.

4. Un con circular drept are lungimea razei bazei de $5\sqrt{2}$ cm şi generatoarea de 10 cm.

Să se găsească volumul conului.

5. Dreptunghiul $ABCD$ se îndoaie de-a lungul diagonalei $[AC]$, pînă cînd planele (ACB) şi (ACD) devin perpendiculare. Dacă $AB = 3$ cm şi $BC = 4$ cm, să se afle lungimea segmentului $[BD]$, după îndoire.

Scanned with OKEN Scanner

1. Enunț identic cu cel de la problema nr. 1, setul 14 (v. pag. 15).

2. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{3x}$.

3. Într-o sferă cu raza de 5 cm se înscrie un cilindru circular drept, cu înălțimea de 6 cm. Se cer :

a). aria calotei aflate deasupra bazei cilindrului ;

b). aria laterală și volumul cilindrului.

(Județul Dîmbovița, iulie 1982)

1. Simplificați fracțiile raționale :

a). $\frac{-8X^3Y^4}{6X^4Y^3}$; b). $\frac{3XY - 3Y^2}{3Y^2 - 3XY}$; c). $\frac{4(X+Y)^2 - 4(X+Y) + 1}{2X + 2Y - 1}$;

d). $\frac{(X^2+X)(X^2+X+1) - 2}{(X^2+X)(X^2+X+3) + 2}$.

2. Rezolvați ecuațiile de mai jos, analizînd toate cazurile care pot apare (a și m fiind parametri reali) :

a). $(m+1)x + a = x$; b). $(x+1)^2 = 1 - 2(x+3)$;

c). $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{3(2x-1)}{2x+1} - \frac{8x}{4x^2-1} = 0$.

3. Într-o piramidă triunghiulară regulată se cunosc : lungimea laturii bazei $l_3 = 5\sqrt{3}$ m și cea a înălțimii piramidei $h = 6$ m. Să se calculeze lungimea muchiei laterale, lungimea apotemei piramidei și aria totală.

4. Un triunghi dreptunghic $ABC(\text{m}\sphericalangle(A) = 90°)$ se rotește, pe rînd, în jurul catetelor și apoi a ipotenuzei.

a). Dacă $AB = 5$ dm și $AC = 12$ dm, găsiți cele trei volume $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$.

b). Dacă $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $\mathcal{V}_1$ și $\mathcal{V}_2$ sînt volumele obținute prin rotirea triunghiului în jurul catetelor, iar $\mathcal{V}$, volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei, arătați că :

$$\frac{1}{\mathcal{V}^2} = \frac{1}{\mathcal{V}_1^2} + \frac{1}{\mathcal{V}_2^2}.$$

c). Formulați o reciprocă la b).

(Județul Hunedoara, iulie 1984)

Scanned with OKEN Scanner

41

1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases}(x+1)y=(x+5)(y-4);\\(x+2)(y+4)=(x+4)y.\end{cases}$$

2. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{R}$, polinomul $P(X)=2X^5+2X^2+m$ se divide cu binomul $X+2$?

3. Fie polinomul $P(X)=X^3-3X^2+2X$. Să se găsească un număr real a astfel încît valorile polinomului în $(a-1)$ și a să fie egale.

4. Să se determine aria și volumul unui con circular drept, știind că $R=4$ cm și $G=5$ cm.

5. În vîrful A al triunghiului dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A)=90°$) se ridică perpendiculara pe planul triunghiului pe care se consideră segmentul $[AM]$ de lungime 10 cm.

Știind că $AB=40$ cm și $AC=30$ cm, să se determine:

a). distanța de la M la dreapta BC;
b). volumul piramidei $MABC$;
c). aria laterală a piramidei $MABC$;
d). aria totală a piramidei $MABC$.

(Județul Sibiu, iulie 1983)

42

1. a). Să se simplifice:

$$\frac{X^2-25}{X^2-10X+25}.$$

b). Să se efectueze:

$$\left(X-\frac{1}{X-1}\right)\cdot\frac{(X-1)^2}{X^2-X-1}.$$

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încît ecuația $8x^2-14x+m=0$ să admită drept rădăcină pe $1/4$ și apoi să se rezolve.

3. În ecuația $x^2-px+36=0$, să se determine parametrul real p, astfel încît $x_1=x_2$.

4. Să se afle volumul unui con circular drept, cu $R=6$ cm și $G=10$ cm.

5. Enunț identic cu cel de la problema nr. 3, setul 8 (v. pag. 12).

(Județul Vîlcea, iulie 1984)

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

43

1. a). Să se arate că polinomul $P(X) = X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8$ este divizibil cu polinoamele $Q(X) = X - 2$ și $R(X) = X + 2$;

b). Folosind, eventual, rezultatul de la punctul a), să se simplifice fracția:

$$F(X) = \frac{X^4 - X^3 - 6X^2 + 4X + 8}{X^4 - 16}.$$

2. Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{3 - x} + \sqrt{2 - x} = 1.$$

3. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel, al cărui perimetru este 18 cm iar lungimea segmentului care unește mijloacele laturilor congruente ale triunghiului este de 4 cm. În con se face o secțiune printr-un plan paralel cu baza, situat, față de vîrf, la $\frac{2}{3}$ din înălțimea conului.

a). Să se calculeze aria laterală și totală a conului inițial.

b). Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con obținut.

c). Să se calculeze volumul sferei înscrise în conul inițial.

(Județul Tulcea, iulie 1982)

44

1. a). Să se arate că ecuația $\frac{4 + x}{x + 1} - \frac{x + 1}{4 + x} = m$ are cel puțin o rădăcină reală, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

b). Să se rezolve ecuația pentru $m = 3$.

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 42 \\ \frac{x - 1}{4} = \frac{y + 1}{5} = \frac{z}{3}. \end{cases}$$

3. Enunț identic cu cel de la problema nr. 3, setul 43 (v. mai sus).

(Județul Mehedinți, iulie 1982)

45

1. Se dă polinomul $P(X) = aX^2 + bX + c$, în care a, b, c sînt numere reale.

a). Determinați a, b, c astfel încît:

$$P(1) = P(2) = 0; \quad P(-1) = 18.$$

b). Pentru $a = 3$, $b = -9$ și $c = 6$, descompuneți polinomul în factori; determinați, apoi, valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care fracția:

$$F(X) = \frac{P(X)}{X^2 - 2X + m}$$

este ireductibilă.

2. Enunț similar cu cel de la problema nr. 2, numai pct. c, setul 30 (v. pag. 25).

3. O piramidă are ca bază trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AD \| BC$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = 90°)$. Se știe că $AD = a$, $BC = 2a$, $AB = 2a$, $a > 0$. Înălțimea piramidei, $[VO]$, cade în punctul O, mijlocul segmentului $[AB]$. Știind că $VO = a$, să se calculeze:

a). ariile triunghiurilor VAB, VAD și VBC;

b). volumul piramidei.

(Județul Sibiu, iulie 1982)

46

1. Se dă ecuația:

$$x^2 - mx + m - 1 = 0, \ m \in \mathbb{R}.$$

a). Să se rezolve ecuația în cazul $m = 3$.

b). Să se arate că pentru orice m real, ecuația:

$$x^2 - mx + m - 1 = 0$$

are soluții reale.

c). Pentru ce valori ale lui m ecuația dată admite rădăcina $x_1 = 1$? Aflați, apoi, x_2 și determinați valorile întregi ale lui m pentru care $\frac{4x_1}{x_2}$ este număr întreg.

2. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară se cunosc lungimea laturii bazei mari $L = 12$ cm, lungimea laturii bazei mici $l = 6$ cm și volumul $\mathcal{V} = 63\sqrt{3}$ cm^3.

Se cer:

a). lungimile înălțimii și apotemei trunchiului de piramidă;

b). aria laterală a trunchiului de piramidă;

c). volumul piramidei din care provine trunchiul de piramidă.

3. Să se efectueze:

$$\left(\frac{X^2 - X}{X^2 + 1} + \frac{2X^2}{X^3 - X^2 + X - 1}\right) : \frac{X^2}{X^2 - 1}.$$

4. Enunț identic cu cel de la problema nr. 3 setul 8 (v. pag. 12).

(Județul Brăila, iulie 1984)

Scanned with OKEN Scanner

47

1. a). Să se rezolve ecuaţiile :

α). $\frac{x+1}{3}+\frac{x}{2}-1=\frac{5x-6}{4}$;

β). $(x+1)^2-25=0$.

b). α). Să se determine funcţia liniară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pentru care $f(1)=3$ şi $f(2)=5$;

β). Să se reprezinte grafic funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

2. a). Să se afle valorile parametrului real a pentru care ecuaţia $x^2+ax+9=0$ are soluţii reale.

b). Să se arate că dacă :

$$P(x+1)=P(x)+2(x+3)+1,\ (\forall)\ x\in\mathbb{R},$$

atunci $P(x)=x^2+ax+9$, cu a astfel determinat, este pătratul unui binom.

3. a). Să se enunţe teorema lui BÈZOUT.

b). Fie polinomul :

$$Q(X)=(X-1)(X+1)(X^2+1)(X^4+1)+2(X^4+1).$$

Să se demonstreze că nu există numere reale a, astfel ca $X-a$ să dividă polinomul dat.

c). Dacă polinomul $R(X)$ are coeficienţi întregi şi $R(1)=R(2)=0$, arătaţi că $R(x)$ este un număr divizibil cu 2, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

4. Să se afle aria totală a trunchiului de con cu înălţimea $h=8$ cm, raza bazei mari $R=7$ cm şi volumul $\mathcal{V}=152\pi$ cm^3.

5. Se dă un tetraedru regulat $SABC$ cu muchia de 6 cm.

a). Să se afle :

α). aria totală şi volumul tetraedrului;

β). cosinusul unghiului format de două feţe ale tetraedrului;

b). dacă M este mijlocul muchei $[SC]$, să se demonstreze că SC este perpendiculară pe planul (MAB).

(Judeţul Argeş, iulie 1984)

48

1. a). Să se aducă expresia :

$$E(a,b)=\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}+\frac{2ab}{a^2-b^2},\ a\neq b$$

la forma cea mai simplă.

b). Să se calculeze $E(4,2)$.

2. Se dă un con circular drept, cu generatoarea de 5 cm şi raza bazei de 3 cm. La o distanţă de bază, egală cu 1/4 din înălţime, se consideră un plan de secţiune, paralel cu planul bazei.

Scanned with OKEN Scanner

a). să se afle aria totală și volumul conului.
b). să se afle aria totală și volumul trunchiului de con obținut.

3. Să se rezolve inecuația :

$$(x-2)^2+2x+1<(x+2)^2+13.$$

(Județul Botoșani, iulie 1982).

49

1. Enunț identic cu cel de la problema nr. 3, setul 46 (v. pag. 34).

2. Fie ecuația :

$$x^2-10x+m+3=0,\ m\in\mathbb{R}.$$

Care este cea mai mare valoare a lui m pentru care ecuația are soluții reale? Să se rezolve, în acest caz.

3. Un triunghi isoscel are perimetrul de 160 m, iar baza este cu 20 m mai mică decît oricare din laturile congruente. Să se afle lungimile laturilor.

4. Enunț similar cu cel de la problema nr. 3, setul 2 (v. pag. 8).

(Județul Bihor, iulie 1982).

50

1. Într-o sferă cu raza de $8\frac{1}{3}$ cm se înscrie un con circular drept cu înălțimea de 6 cm, care se secționează apoi cu un plan paralel cu baza, rezultînd din această secțiune un cerc de arie 16π cm^2.
Se cer :
a). lungimile generatoarei și razei conului inițial;
b). aria laterală a conului, considerînd raza bazei de 8 cm;
c). volumul trunchiului de con obținut prin secțiunea mai sus precizată și aria calotei sferice ce conține conul și are ca bază, baza conului.

2. Se dă fracția :

$$F(X)=\frac{(4X+3)(X^2+X+1)}{(X+1)^3+X^3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

a). Să se arate că $F(X)$ se poate pune sub forma :

$$F(X) = 2 + \frac{1}{2X + 1}.$$

b). Să se afle valorile lui x pentru care :

$$F(x) - 5x = 0.$$

(Județul Brăila, iulie 1983)

51

1. a). Să se efectueze :

$$\left(\frac{X}{X^2-4} + \frac{2}{2-X} + \frac{1}{X+2}\right) : \left(X - 2 + \frac{10 - X^2}{X+2}\right)(2 - X).$$

b). Să se rezolve sistemul :

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2; \\ x + y = 5 \end{cases}$$

2. a). Să se demonstreze că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, ecuația :

$$mx^2 - (m^2 + 1)x + m = 0$$

are soluții reale.

b). Să se calculeze x_1 și x_2 pentru $m > 1$.

c). Să se afle $m > 1$ astfel încît :

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{17}{4}.$$

3. Se dau polinoamele :

$$P(X) = 3X^2 - X^3 + X - 3;$$

$$Q(X) = X^2 - 2X - 3;$$

$$R(X) = -X^2 - 5X + m.$$

a). Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încît $R(X)$ să fie divizibil cu $X + 2$.

b). Să se descompună în factori ireductibili cele trei polinoame, înlocuind în $R(X)$ pe m determinat anterior.

c). Să se arate că :

$$H(X) = 2X^2 + P(X) \cdot Q(X) + R(X) + 14$$

este pătrat perfect.

4. Un trapez dreptunghic are baza mare de 16 cm, înălțimea de 30 mm și lungimea bazei mici egală cu 0,75 din lungimea bazei mari.

Se cer :

a). perimetrul și aria trapezului ;

b). aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mici.

5. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm și înălțimea de 24 cm.

Să se afle :

a). raza bazei mici ;

b). aria totală și volumul trunchiului de con ;

c). înălțimea conului din care provine trunchiul de con ;

d). raza sferei circumscrise conului de la punctul c) și volumul sferei înscrisă în acest con.

(Județul Argeș, iulie 1983)

52

1. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, descrisă de :

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ dacă } x \geq 2 ; \\ -x + 2, \text{ dacă } x < 2. \end{cases}$$

2. Să se efectueze :

$$\left(\frac{X^2}{Y^3} + \frac{1}{X}\right) : \left(\frac{X}{Y^2} - \frac{1}{Y} + \frac{1}{X}\right).$$

3. Să se rezolve ecuația :

$$\frac{4x - 3}{x - 4} = x + 12.$$

4. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Știind că aria laterală a prismei este de 288 cm², să se afle volumul prismei.

5. Fie $ABCD$ un romb cu latura de lungime a și $m(\sphericalangle A) = 60°$. În punctul A se ridică perpendiculara pe planul (ABC) pe care se consideră punctul M așa ca $AM = \frac{3a}{2}$.

Să se afle :

a). distanța de la punctul M la dreapta BC ;

b). volumul piramidei cu vîrful în B și baza AMB.

Scanned with OKEN Scanner

1. Să se efectueze:

$$\left(a - \frac{4ab}{a+b} \div b\right) : \left(\frac{a}{a \div b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2}\right).$$

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x \div y}{2} - \dfrac{x-y}{3} = 8; \\ \dfrac{x \div y}{3} + \dfrac{x-y}{4} = 11. \end{cases}$$

3. Să se simplifice fracția:

$$\frac{2X^2 - (3a \div b)X + a^2 + ab}{2X^2 - (a \div 3b)X + ab + b^2}.$$

4. Să se demonstreze că:

a). $xy = \dfrac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$;

b). dintre toate dreptunghiurile cu același perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

5. Care sînt ecuațiile de gradul al II-lea, de forma $x^2 \div px \div q = 0$, în care coeficienții p și q sînt chiar rădăcinile ecuației date?

6. Să se calculeze valoarea polinomului:

$$P(X) = X^4 - 2X^3 \div 3X^2 - 2X + 2,$$

înlocuind nedeterminata X cu fiecare din rădăcinile ecuațiilor:

a). $x^2 - x = 2$; b). $x^2 - x = 3$.

7. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel al cărui perimetru este de 18 cm, iar lungimea segmentului care unește mijloacele laturilor congruente ale triunghiului este de 4 cm. În con se face o secțiune printr-un plan paralel cu baza, la 2/3 din înălțimea conului față de vîrf.

Să se afle:

a). aria laterală și volumul conului inițial;

b). aria laterală și volumul trunchiului de con obținut;

c). razele sferelor înscrisă și circumscrisă conului inițial.

(Județul Argeș, iulie 1982)

54

1. Să se aducă la forma cea mai simplă:

$$\frac{2}{X^2+3}+\frac{1}{X+1}-\frac{8}{(1-X^2)(X^2+3)}.$$

2. Să se afle dimensiunile unui dreptunghi, cunoscînd că perimetrul este de 84 m și aria de 425 m².

3. Enunț identic cu cel de la problema nr. 2, setul 43 (v. pag. 33).

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{2-x}=1.$$

4. O prismă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are diagonala de 13 cm și raza cercului circumscris bazei de 6 cm. Să se afle volumul, ariile laterală și totală ale prismei.

5. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm și înălțimea de 24 cm.

a). Să se determine volumul și aria totală a trunchiului de con.

b). Să se afle volumul conului din care provine trunchiul de con.

c). Să se calculeze raza sferei circumscrise conului din care provine trunchiul de con.

(Județul Bihor, iulie 1983)

55

1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+3y+z=42; \\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z}{3}. \end{cases}$$

2. Să se arate că ecuația:

$$\frac{4+x}{1+x}-\frac{1+x}{4+x}=m$$

are cel puțin o rădăcină reală, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

3. Enunț identic cu cel de la problema nr. 3, numai pct. a), setul 5 (v. pag. 10).

(Județul Brăila, iulie 1982)

56

1. Enunț identic cu cel de la problema nr. 1, setul 52 (v. pag. 38).

2. a). Să se rezolve ecuația:

$$(x-5)^2+(x+6)(x-6)=2(x+3)^2+15.$$

b). Să se rezolve ecuația:

$$\frac{x+1}{a}+2=ax+1,\ a\in\mathbb{R}$$

și să se analizeze toate cazurile posibile.

3. a). Să se efectueze:

$$\frac{1}{X}+\frac{2}{X-1}-\frac{X+1}{1-X^2}.$$

b). Să se simplifice fracția:

$$\frac{X^2+7X-8}{2X^2-3X+1}.$$

4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul muchiei $[AD]$, iar N este mijlocul muchiei $[CD]$. Știind că $MN=5\sqrt{2}$ m, să se calculeze volumul și aria totală a cubului.

5. Un con circular drept are raza bazei de 8 m și înălțimea de 16 m. Se cer:

a). volumul și aria totală ale conului;

b). să se determine la ce distanță de planul bazei trebuie să se facă o secțiune în con, printr-un plan paralel cu baza, astfel ca ariile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

(Județul Prahova, iulie 1984)

57

1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+17y=300; \\ 11x-y=104. \end{cases}$$

2. Dimensiunile unui dreptunghi de arie 6 230 m² sînt exprimate prin două numere naturale consecutive. Să se afle aceste dimensiuni.

3. Să se efectueze:

$$\frac{X^2+Y^2}{XY}-\frac{X^2}{XY+Y^2}-\frac{Y^2}{XY+X^2}.$$

4. Enunț identic cu cel de la problema nr. 5, numai pct. a), setul 41 (v. pag. 32).

5. Enunț identic cu cel de la problema nr. 4, setul 54 (v. pag. 40).

(Județul Botoșani, iulie 1984)

Scanned with OKEN Scanner

58

1. Rezolvaţi :

a). $x^2 - 5x + 4 = 0$; b). $7x + 2x = 18$;

c). $\begin{cases} 5x + y = 6; \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

2. a). Efectuaţi :

$$3X^2 - 3X + 5 - (2X^2 - 3X + 4).$$

b). Aflaţi restul împărţirii polinomului $5X^4 - 21X^2 + 7$ la binomul $X - 2$;

c). Demonstraţi că triunghiul ale cărui laturi de lungimi a, b şi c satisfac relaţia $\frac{c-b}{a} + \frac{a-c}{b} + \frac{b-a}{c} = 0$ este isoscel.

3. Se consideră tetraedrul $ABCD$.

a). În cazul cînd feţele ABC şi DBC sînt perpendiculare şi sînt triunghiuri echilaterale, cu $BC = 8$ cm, determinaţi aria totală a tetraedrului.

b). În cazul cînd tetraedrul este regulat şi M este mijlocul muchiei AC, arătaţi că dreapta AC este perpendiculară pe planul (MBD) ;

c). În cazul cînd muchiile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi $[DA]$ sînt congruente, iar M şi N sînt respectiv mijloacele muchiilor $[AC]$ şi $[BD]$, demonstraţi că dreapta MN este perpendiculară pe dreptele AC şi BD.

(Municipiul Bucureşti, iulie 1985)

59

1. Să se rezolve :

a) ecuaţia $6x + 4x = 15$;

b) inecuaţia $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{2} < 5$;

c) ecuaţia $4x^2 + x - 5 = 0$.

2. a) Să se simplifice $E = \frac{(a+5)^2 - (a-5)^2}{(2a+5)^2 + (2a-5)^2}$ şi să se arate că $E \leqslant \frac{1}{2}$, pentru orice număr real a.

b) Să se determine cîtul şi restul împărţirii polinomului $X^4 + X^3 + X + 1$ la polinomul $X - 1$.

c) Fie a, b, c, p numere reale, astfel încît $a + b + c = 6p$. Să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 12p^2$.

3. Se consideră o piramidă triunghiulară $VABC$, în care $VA = VB = VC = AB = BC = a$ şi $\widehat{AVC} = \widehat{ABC} = 90°$. Fie D mijlocul lui AC.

a) Să se arate că AC este perpendiculară pe planul VBD.

b) Să se calculeze aria totală şi volumul piramidei.

c) Să se arate că există un punct I situat la aceeaşi distanţă de cele patru vîrfuri ale piramidei şi să se calculeze această distanţă.

(Subiect unic, iulie 1986)

Scanned with OKEN Scanner

B. TEME PENTRU CERCURILE DE ELEVI (MATEMATICA GIMNAZIALĂ DINCOLO DE MANUAL)

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

CAPITOL PRELIMINAR : Metodologii fundamentale în rezolvarea problemelor matematice 45

CAPITOLUL I : Principiul cutiei 53

CAPITOLUL II : Pătrate perfecte 69

CAPITOLUL III : Media aritmetică. Media geometrică 80

CAPITOLUL IV : Probleme de ordonare 100

CAPITOLUL V : Probleme de numărare 110

CAPITOLUL VI : Sume. Produse 125

CAPITOLUL VII : Probleme care implică noțiunea de paritate 142

CAPITOLUL VIII : Mulțimi. Partiții ale unei mulțimi 154

CAPITOLUL IX : Cîteva probleme de sinteză 169

Scanned with OKEN Scanner

METODOLOGII INTUITIVE FUNDAMENTALE ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR MATEMATICE

I. Intuiţie şi rigoare

Ca urmare a gradului înalt de generalitate şi de abstracţie atins de matematică în secolul nostru, există o tendinţă în fiecare dintre noi de a căuta să abordăm cu o excesivă predilecţie noţiunile cele mai subtile cu metodele cele mai formalizate. Este o consecinţă a revoluţiei structurale suferite de matematică, de această revoluţie care a pus pe baze axiomatice structurile fundamentale, pe care le denumim astăzi algebrice, de ordine şi topologice şi a formalizat într-o largă măsură metodele şi instrumentele matematicii moderne.

Această tendinţă se reflectă şi în învăţământul matematic începînd de la cel primar şi chiar preşcolar şi o găsim accentuată în cel gimnazial şi apoi afirmată cu precădere în cel liceal, atît în ţara noastră, cît şi în alte ţări. Problema conţinutului, structurării şi organizării învăţământului matematic nu este încă rezolvată nici pe plan internaţional, dar un lucru este de pe acum cîştigat: *nu ne mai putem întoarce la formele anterioare şi nu putem nega necesitatea definiţiilor şi demonstraţiilor riguroase.* Ceea ce trebuie însă să acceptăm, dacă nu avem chiar convingerea fermă, este *necesitatea de a nu elimina intuiţia din raţionamentele folosite în demonstrarea unor teoreme stabilite şi incorporate atît în disciplinele matematice la dispoziţia specialiştilor şi cercetătorilor, cît şi în cele destinate învăţămîntului de toate gradele.*

Poate părea paradoxal, dar cu atît mai puţin este indicat să ne debarasăm de intuiţie în cercetarea matematică. Opinia grupului BOURBAKI, exprimată printr-unul dintre reprezentanţii săi cei mai autorizaţi, profesorul J. DIEUDONNÉ, este că *intuiţia este indispensabilă invenţiei matematice, funcţionînd ca un fel de ghicire anticipativă.*

Opinia noastră este identică acesteia şi o întregeşte prin cerinţa de a se folosi cu tragere de inimă — dar şi cu discernămînt — resursele intuiţiei matematice pretutindeni. Aceasta trebuie să funcţioneze ca o modelare semiconcretă a noţiunilor şi proceselor abstracte specifice matematicii definită ca teorie a structurilor abstracte ale tuturor formelor de existenţă şi mişcare ale materiei.

În consecinţă, intuiţia trebuie folosită — şi avem convingerea că este folosită de orice matematician activ şi fără prejudecăţi structuraliste — dar în acelaşi timp ea trebuie controlată şi orientată prin exigenţele rigorii. Aici intervine purificarea înfăptuită prin revoluţia structurală şi este nu numai binevenită, dar indispensabilă.

Marele cîştig de ordin metodologic, pe care trebuie să-l culegem şi să-l fructificăm sistematic, fiind dăruit de matematica modernă învăţămîntului, este capacitatea de a gîndi riguros, pe baze integrate în cultura matematică, folosind revoluţia structurală, dar fără a sacrifica intuiţia, fără de care apare pericolul sterilităţii culturii şi tehnicii matematice în ceea ce ea justifică şi îndreptăţeşte prestigiul matematicii, prin universala ei aplicabilitate.

II. Surse de inspiraţie în matematica elementară. Principiul cutiei

Există în matematica elementară nenumărate surse de inspiraţie fecundă, unele chiar prodigioase şi revelatoare de căi atrăgătoare şi fertile pentru imaginaţiile cele mai îndrăzneţe. Nu este nevoie de a folosi metode rafinate şi bazate pe tehnici, care nu se asimilează decît cu preţul unei pregătiri de nivel superior şi chiar hipersuperior, pentru a beneficia de bucuria de a cunoaşte matematica în fapte şi realizări impresionante. Chiar şi putinţa de a produce astfel de fapte nu este rezervată exclusiv celor ce au atins culmile abstracţiei, generalităţii şi formalizării

Scanned with OKEN Scanner

raționamentului logic deductiv. Se pot realiza rezultate matematice de o autentică valoare pe-renă cu folosirea mijloacelor de nivelul învățământului gimnazial, ba chiar și a celui primar. Fiindcă sînt probleme matematice care nu cer aproape nici o cultură specială, putînd fi abordabile cu mijloace ale gîndirii cotidiene, dar care prezintă totuși dificultăți ce se trec numai cu eforturi cerebrale remarcabile, cu imaginație și ingeniozitate.

Pentru a ilustra afirmațiile făcute în cele de mai sus, dar și pentru a încuraja spirite înzestrate cu o modestie demobilizatoare, vom trece în revistă cîteva din aceste sectoare, care nu sînt specificate ca atare în manuale și nici în alte mijloace didactice, de asemenea nici în reviste de specialitate.

Un strălucit exemplu este *principiul cutiei* sau *principiul lui* DIRICHLET. Faptul că acest celebru matematician care a adus rigoare și exigență în analiza matematică, dovedind un spirit profund și un simț al fineții de raționament deosebit, a creat acest principiu, trebuie să ne dea de gîndit asupra posibilităților de modelare logico-matematică a unor fapte și evenimente cotidiene, cu șanse de realizări neașteptate și pe arii deosebit de largi în aplicabilitate.

Într-adevăr, într-o formulare fără nici o pretenție, acest principiu revine la observația că dacă avem două sertare în care trebuie să punem trei obiecte, într-unul din sertare va trebui să așezăm cel puțin două obiecte.

Cu spiritul nostru generalizator de matematicieni vom formula imediat această constatare de bun simț astfel : *dacă dispunem de* n *sertare, în care este necesar să așezăm* n + 1 *obiecte, atunci cel puțin într-un sertar vor intra cel puțin două obiecte.*

Poate fi erijată o astfel de banalitate la rangul de principiu ? Noi considerăm cu prisosință că da, avînd în vedere profunzimea aplicațiilor, care de care mai neașteptate, din cele mai variate domenii ale matematicii. Vom prezenta cîteva dintre acestea folosind secțiunea de față.

Exemplul 1. *Oricare ar fi trei numere naturale* n, p, q, *două dintre ele au totdeauna ca sumă un număr par.*

Vom folosi modelul sertarelor, așezînd într-unul numerele n și p a căror sumă voim s-o evaluăm și în cel de-al doilea numărul rămas q. Dacă n și p sînt de aceeași paritate, atunci $n + p$ este par și problema este rezolvată ; dacă nu au aceeași paritate, unul este par și celălalt impar. Atunci cercetăm paritatea lui q și extragem din primul sertar numărul n sau p care are aceeași paritate cu q, trecîndu-l în cel de-al doilea sertar.

Exemplul 2. *Într-un sertar se găsesc mai multe bile de trei culori diferite. Care este numărul minim de bile pe care trebuie să le extragem din sertar, fără a privi înăuntru, pentru a fi siguri că am extras cel puțin două bile de aceeași culoare?*

Care este numărul minim de bile care trebuie să se găsească în sertar, pentru ca problema să fie posibilă?

Modelul sertarelor ne îndeamnă să atribuim fiecărei culori un sertar și să considerăm cazul cel mai defavorabil, cînd extragem trei bile de culori diferite. Atunci, a patra bilă va fi, în mod necesar, de una din cele trei culori, deci numărul minim de extracții pentru a avea *certitudinea* este patru.

Acesta este și numărul minim de bile care trebuie să se găsească în sertar pentru ca problema să fie posibilă.

Comentarii : Ca în orice problemă, o analiză a datelor este indispensabilă, dar în cazul principiului cutiei aceasta trebuie să fie cît se poate de riguroasă, fiecare termen avînd un rol important. Dacă nu subliniam necesitatea certitudinii, problema devine de natură probabilistă, fiindcă se putea ca, extrăgînd numai două bile, ambele să fie de aceeași culoare, dar și de culori diferite. Extrăgînd o a treia bilă, aceasta ar putea fi și ea de a treia culoare sau de aceeași culoare cu una din cele două extrase.

Totodată, merită să fie subliniată diversitatea situațiilor care conduc la folosirea principiului lui DIRICHLET precum și necesitatea de a le discerne prin modelare. Odată folosit modelul sertarelor, se poate trece la o abstractizare a procesului, ceea ce permite folosirea lui și în alte aplicații.

Exemplul 3. *Fiind date* n + 1 *numere naturale, cel puțin două dintre acestea împărțite prin* n *vor da același rest.*

În primul rînd ne punem întrebarea dacă este cazul să aplicăm principiul cutiei și cui. Fiindcă urmărim să arătăm că obținem cel puțin de două ori același rest, obiectele de așezat în sertare sînt resturile împărțirii cu n. Este însă necesar să stabilim numărul sertarelor cît și cel al obiectelor.

Sertarele vor fi numărul de resturi posibile în împărțirea cu n. Ori, acesta este egal cu n, fiindcă resturile pot fi $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, deci n sertare.

În același timp, împărțind $n + 1$ numere vom obține $n + 1$ resturi, din care numai n pot fi diferite. Prin urmare, cel puțin două numere din cele $n + 1$ vor da resturi egale.

Scanned with OKEN Scanner

Comentarii : Exemplul a fost ales din aritmetică şi a necesitat numai cunoaşterea faptului că restul împărţirii unui număr natural prin altul este mai mic decît împărţitorul, în cazul nostru mai mic decît *n*. Exemplul următor va fi din domeniul geometriei plane.

Exemplul 4. *Trei drepte distincte împart planul, în care se găsesc, într-un număr de regiuni disjuncte. Să se arate că, oricum am distribui 8 puncte în acest plan, cu condiţia ca niciunul să nu aparţină nici uneia din drepte, cel puţin două dintre ele se vor găsi în aceeaşi regiune.*

Aici sertarele se impun de la sine, ele vor fi regiunile disjuncte în care este împărţit planul. Este cazul, deci, să le numărăm şi apoi să plasăm obiectele, care sînt punctele date. Regiunile sînt disjuncte, fiindcă excludem din ele dreptele frontiere.

Iată un exemplu în care intuiţia geometrică este indispensabilă, fiindcă pot apărea încă multe cazuri, după poziţia naturală a celor 3 drepte distincte. Un caz este cel al dreptelor paralele, cînd vom avea 4 regiuni, uşor de distins. Un al doilea caz apare cînd două dintre drepte sînt paralele şi a treia este o secantă la ele; atunci apar 6 regiuni. Dacă renunţăm la paralelism şi două dintre drepte sînt concurente, cea de-a treia poate fi şi ea concurentă cu acestea în acelaşi punct sau poate forma cu ele un triunghi. În primul caz, vom distinge tot 6 regiuni, iar în cel de-al doilea, 7 şi acesta va fi maximul posibil, deci cel mai defavorabil. Dar, cum există 8 puncte, una dintre regiuni va trebui să conţină cel puţin două dintre acestea.

III. Intuiţia în aplicarea principiului lui Dirichlet

În exemplele date intuiţia a jucat roluri de seamă atît în recunoaşterea unui model al principiului cutiei cît şi în tratarea acestuia. Ceea ce caracterizează problemele în care acest principiu intervine salutar, este tocmai dificultatea de a le aborda pe căi bătătorite, la umbra unor algoritmi, sau în lumina unor formulări axiomatizante.

Enunţurile acestora au totdeauna ceva surprinzător, inedit, neaşteptat. Să luăm, de pildă, exemplul 1 şi pe care l-am tratat mai înainte pur matematic. Acesta ne pune în faţa a trei numere naturale luate la întîmplare şi ne obligă să credem că suma a două dintre ele nu poate fi decît un număr impar. Intuiţia ne îndeamnă să încercăm cu două numere impare sau cu unul par şi altul impar. În primul caz, problema este rezolvată, dar în al doilea, nu. Ce mai putem face? Vom lua în consideraţie pe al treilea, care şi el poate fi par sau impar. Dar, iată că această ambiguitate este tocmai ceea ce ne trebuie, fiindcă îl vom asocia fie cu cel par, fie cu cel impar din prima combinaţie.

Problema este rezolvată prin căutări controlate în cele două sertare unde vom aşeza cele trei numere. Care a fost metoda folosită? Este ea încadrată în vreun capitol de matematică? Urmează ea cu necesitate o cale logic-deductivă neşovăitoare? Dimpotrivă, calea aleasă a fost şovăitoare, între posibilităţile oferite de arbitrara alegere a celor trei numere naturale.

Situaţii similare apar şi în celelalte exemple, din care vom sublinia numai pe al patrulea, unde se dau trei drepte distincte şi 8 puncte nesituate pe nici una dintre ele. Intuiţia ne poartă de la început pe drumul caracterizării configuraţiilor posibile, fără să ştim dacă se poate recurge la principiul cutiei. În acest scop ar trebui ca în cel mai defavorabil caz să nu putem număra mai mult de 7 regiuni, ceea ce descoperim pînă la urmă. *Principiul cutiei este, deci, legat de căutări pe căi ce nu se oferă de la sine, şi în acelaşi timp, în el însuşi nu cere cunoştinţe de matematică, ci tehnici logico-deductive dirijate de intuiţie.*

În ultimii ani, acest principiu a căpătat o popularitate mare, fiind pus la baza unui număr impresionant de probleme, dintre care unele deosebit de dificile, deşi nu fac apel la cunoştinţe matematice de înalt nivel teoretic. Iată două exemple grăitoare :

Exemplul 5. *Pe o sferă cu raza de lungime 1 se iau la întîmplare 9 puncte. Să se demonstreze că dintre acestea există două a căror distanţă nu depăşeşte numărul* $\sqrt{2}$.

Vom da numai o schiţă fugitivă a raţionamentului organizat cu intenţia de a aplica principiul cutiei. Vom căuta să împărţim sfera în 8 regiuni egale; astfel, vor exista cu siguranţă două puncte ce vor intra într-o aceeaşi regiune. Vom evalua arcul de cerc mare cuprins între ele şi vom compara cu arcele de meridian şi ecuator care mărginesc regiunea. Apoi vom compara coardele respective şi vom deduce rezultatul urmărit.

Exemplul 6. *Fie mulţimea* $M = \{1, 2, \ldots, 1983\}$. *Să se arate că, oricare ar fi submulţimea* X *a lui* M, *avînd 15 elemente, există două submulţimi disjuncte* A *şi* B *ale acesteia astfel încît suma elementelor lui* A *să fie egală cu suma elementelor lui* B.

Pentru a se ajunge la aplicarea principiului cutiei se numără submulţimile nevide ale lui *X*. Acestea sînt în număr de $2^{15} - 1 = 32\,767$. Se evaluează maximul şi minimul sumei elementelor acestor părţi şi se găseşte că maximul este 29 640. Deci aceste sume pot lua 29 640

valori distincte. Cum numărul lor este 32 767, devine evident faptul că există cel puțin două care au aceeași sumă a elementelor, fie acestea U și V. Dacă nu sînt disjuncte, vom lua :

$$A = U - (U \cap V),\ B = V - (U \cap V).$$

Considerăm că aceste exemple arată cît de importantă este intuiția, în discernerea și aplicarea principiului cutiei și că dificultățile problemelor în care este aplicat nu decurg din necesitatea folosirii unor raționamente de înalt nivel teoretic, ceea ce este încurajator pentru orice matematician sau beneficiar al matematicii.

IV. Relația de ordine și operația de ordonare

În viața de toate zilele folosim din plin relații de ordine concrete : „mai mare decît", „mai mic decît", „mai devreme decît", „mai tîrziu decît" etc. Aceste relații compară entități socotite comparabile, deci făcînd parte din anumite categorii sau clase. Orice copil, chiar și înainte de a fi preșcolar, are intuiția relațiilor de ordine, dar numai cînd se concretizează în cadrul unor obiecte, persoane, animale, evenimente comparabile. Intuiția acestei relații are la bază percepția senzorială, contactul fizic, deci este înrădăcinată în fiecare dintre noi din fragedă copilărie. În viața socială întîlnim la tot pasul relația de ordine și consecința sa directă : *operația de ordonare*. În matematică, ca apare de timpuriu, cel puțin în cadrul actual al învățămîntului elementar, cînd o găsim chiar în cursul primar, formulată cu simbolul matematic respectiv.

Prin urmare, ținînd seama de caracterul ei fundamental, fiind exponentul *structurii de ordine*, ne putem aștepta ca în învățămîntul matematic să i se acorde un loc de seamă, a cărui amploare să crească odată cu înaintarea în cunoașterea matematică. Și chiar așa se întîmplă, în special în ultimii ani, cînd *relațiile de inegalitate* au căpătat poziții prestigioase în cultura matematică.

Remarcabil este faptul că relația de ordine și operația de ordonare pot fi surse de inspirație pentru probleme elementare, unele foarte dificile. De aceea, în capitolul de probleme elementare speciale, acestea ocupă un loc deosebit. În ceea ce privește arsenalul de mijloace folosibile în problemele de ordonare, introducerea în paragraful respectiv arată că acesta este destul de modest. Ceea ce se poate cuceri cu el este ușor impresionant și dovedește încă odată că *matematica elementară este, mai degrabă, matematică fundamentală pentru orice inspirație.*

Să luăm, de exemplu, măsurile folosite pentru a arăta care dintre numerele reale a și b este mai mare. Uneori proprietatea este evidentă, cunoscînd ordonarea pe axa reală. Alteori însă este necesar să intervenim cu artificii, cum ar fi stabilirea semnului diferenței $a - b$, sau, dacă $a > 0$, $b > 0$, evaluăm raportul $\frac{a}{b}$ și-l comparăm cu 1. Sînt cazuri însă în care este nevoie de subterfugii mai rafinate, cum ar fi intercalarea unui al treilea număr $c > 0$ între a și b. Nu știm relația de ordine între a și b, dar putem arăta că există $c > 0$ astfel încît $a < c$. Dacă reușim să arătăm că și $c < b$, aplicăm proprietatea de tranzitivitate și deducem, din $a < c < b$, că $a < b$.

Desigur, nu putem afirma că întreg arsenalul matematic în problemele de ordonare se reduce la cîteva mijloace elementare de comparare, dar, în fond, se ajunge aproape totdeauna la acestea, chiar dacă parcurgem drumuri ocolite prin domenii prestigioase.

Tipic pentru tehnicile de ordonare a unor numere naturale este următorul exemplu :

Exemplul 7. *Se dau numerele* 3^{3^3}, 3^{33}, 33^3, $(3^3)^3$ *și se cere să se scrie în ordine crescătoare.*

Vom încerca unele comparații directe, altele indirecte prin tranzitivitate și vom avea $3^{3^3} = 3^{27}$, de unde, pentru un moment cel puțin, $3^{33} > 3^{3^3} = (3^9)^3$. Apoi, $33^3 = (3 \cdot 11)^3 > (3 \cdot 9)^3 = (3^3)^3 = 3^9$ și, din comparația inegalităților din cele două rînduri, avem o primă ordonare :

$$3^{33} > 3^{3^3} > (33)^3 > (3^3)^3.$$

Rămîne să vedem unde se plasează $333 = 3^2 \cdot 37$. Vom avea $3^9 = 3^2 \cdot 3^7 > 3^2 \cdot 37$, fiindcă $37 < 3^4 < 3^7$, astfel încît relația de ordine crescătoare va fi :

$$333 < (3^3)^3 < (33)^3 < 3^{3^3} < 3^{33}.$$

Comentarii : Pentru a ordona șirul celor 5 numere naturale, singura restricție de ordin tehnic a fost de a nu se calcula efectiv toate numerele și a le ordona ca atare. Procedeul de inter-

calare între două numere, care nu se pot compara direct, s-a aplicat numerelor 33^3 și $(3^3)^3$, iar comparația dintre 3^9 și 33^3 s-a făcut prin numărarea factorului 3^7.

Numerele iraționale ridică uneori probleme dificile de ordonare, impunînd metode adaptate fiecărui caz în parte. Reținem următorul exemplu:

Exemplul 8. *Să se determine* $\max\left\{\sqrt{2}^{\sqrt{3}}, \sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right\}$.

Desigur că ordonarea directă nu este posibilă. Admițînd ceea ce se demonstrează riguros, anume că operațiile cu puteri în care bazele și exponenții sînt numere reale și pozitive se fac formal ca și cu numere naturale, vom compara puteri egale ale numerelor date.

Astfel, $(\sqrt{2}^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{2}}$ se compară cu $(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}}$ și vom avea:

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2\sqrt{6}} = ((\sqrt{2})^2)^{\sqrt{6}} = 2^{\sqrt{6}} < 2^{\sqrt{9}} = 2^3 = 8;$$

$$(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}} = \sqrt{3^4} = 9,$$

de unde deducem că $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, deci maximul cerut este $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

În general, problemele de ordonare îmbracă aspecte foarte variate și necesită metode adesea ingenioase, dovedind caracterul fundamental al relației de ordine. Uneori, operația de ordonare poate servi pentru a dovedi egalitatea a două numere a și b, prin stabilirea simultană a inegalităților $a \leqslant b$ și $b \leqslant a$.

V. Operația de numărare

Ca și operația de ordonare, numărarea este una din operațiile care intră în activitățile cotidiene. Ea stă la baza aritmeticii și a fost descoperită și cultivată din cele mai îndepărtate epoci ale începuturilor conștiinței umane.

În consecință, *sub aspectele sale matematice, ea este un model al operațiilor de numărare concretă* și nu cere stăpînirea unor teorii înalte. În școală se fac eforturi mari pentru a se învăța copiii încă din învățămîntul preșcolar să recunoască primele numere naturale în calitatea acestora de cardinale ale unor mulțimi concrete. De aceea, în afara exercițiilor de numărare, de asimilare a numerelor naturale din ce în ce mai mari, este indicat să se pună și să se rezolve probleme de numărare.

În fond, *combinatorica este disciplina a cărei vocație este numărarea elementelor unor mulțimi finite, ale părților unei mulțimi sau ale unora dintre elementele sau părțile unei mulțimi*. Astfel privită, operația de numărare poate căpăta în matematică aspecte cît se poate de variate și poate fi sursa unor probleme substanțiale și dificile, fără a cere, în mod obligatoriu, cunoștințe matematice de ordin înalt. Ea poate fi însă legată de orice teorie matematică în care se cere numărarea elementelor unei mulțimi a cărei structură este studiată în acea teorie.

Ceea ce voim să reținem, din aceste considerații, este necesitatea și importanța aprofundării operației de numărare prin probleme care conduc la numărarea elementelor unor mulțimi cît mai variate ca natură și ca structură.

Un paragraf special este consacrat acestui gen de probleme alese din aritmetică, teoria numerelor, geometrie și analiză. Întrucît operația de numărare poate privi și numere raționale sau iraționale, un rol semnificativ poate juca noțiunea de *parte întreagă* a unui număr real, care intervine, de exemplu, în numărarea multiplilor unui număr natural p cuprins în mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ a primelor n numere. Acești multipli sînt în număr de $\left[\frac{n}{p}\right]_*$ și reprezintă exact primii multipli ai lui p pe scara numerelor naturale, cuprinși între p și n. Cu folosirea cunoștințelor elementare de nivel primar și gimnazial se pot aborda numeroase probleme care pun în lumină proprietăți importante ale numerelor reale. Vom da două exemple care nu cer o investigație laborioasă.

Exemplul 9. *Cîte numere de cinci cifre încep și se termină în baza 10 cu cifra 5?*

Structura numerelor de 5 cifre este cunoscută, ca și reprezentarea lor convențională. În cazul considerat ele vor fi de forma $\overline{5abc5}$, unde a, b, c pot lua valorile $0, 1, 2, \ldots, 9$. Cum nici o restricție nu împiedică luarea acestor valori, a va putea lua 10 valori și fiecăreia dintre acestea i se pot asocia 10 valori ale lui b, iar cuplului (a, b) i se asociază 10 valori ale lui c. În total, există $10^3 = 1\,000$ de posibilități de a forma numărul de forma $\overline{5abc5}$, deci există 1 000 de numere naturale de această formă.

Exemplul 10. *Fie date 10 puncte distincte situate în același plan. Dacă acestea determină 43 și numai 43 de drepte distincte, să se arate că trei și numai trei din cele 10 puncte sînt coliniare.*

Vom aborda problema în cazul general a n puncte distincte pentru ca numărarea cazurilor să nu fie, de la început, imposibilă. Într-adevăr, dacă punctele sînt $A_1, A_2, \ldots, A_n$, unind A_1 pe rînd cu celelalte, realizăm $n-1$ drepte. Trecînd la A_2, vom avea, din nou, $n-1$ drepte, dar una este dr. A_2A_1, care, deci, s-a numărat de două ori. Vom avea, astfel, în total:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2} \text{ drepte distincte.}$$

Cînd $n=10$, acest număr va fi $\frac{10\cdot 9}{2}=45$. Dacă s-au realizat numai 43 drepte distincte, înseamnă că două dintre drepte s-au confundat cu o a treia, ceea ce dovedește că trei puncte sînt coliniare, de exemplu A_i, A_j, A_k și deci ele definesc o singură dreaptă în loc de trei.

Comentarii: Exemplul 10 arată că operația de numărare poate avea și aplicații geometrice în care alte metode ar necesita restricții și precizarea configurațiilor date.

Problema poate fi tratată și prin principiul cutiei, care, de asemenea, implică operația de numărare.

Într-adevăr, dacă mulțimea dreptelor distincte determinate de x puncte oarecare are cardinalul 45, vom considera 45 obiecte. În același timp, cele 43 drepte realizate pot fi considerate ca 43 sertare. Cum $45>43$, aplicînd principiul cutiei, într-un sertar vor fi cel puțin două drepte; să le notăm dr. A_iA_j și dr. A_kA_l. Dar atunci am avea 4 puncte coliniare, fiindcă cele două drepte se confundă. Cum sînt numai trei drepte confundate va trebui ca $A_i=A_k$ sau $A_j=A_l$ deci în acel sertar vor fi dreptele dr. A_iA_j și dr. A_iA_k confundate, de unde cele 3 puncte coliniare A_i, A_j, A_k. Cea de-a treia dreaptă dispărută la numărare va fi dr. A_jA_k, deci va intra în același sertar.

În general, principiul cutiei este un principiu de numărare completat cu o aplicație care este surjectivă, dar nu și injectivă.

Într-adevăr, în aplicarea acestui principiu se numără obiectele și sertarele, apoi se aplică mulțimea obiectelor pe mulțimea sertarelor, fiecare sertar primind cel puțin un obiect, deci aplicația este surjectivă. Dar, cum rămîn obiecte, care trebuie să intre suplimentar în cel puțin un sertar, aplicația nu poate fi injectivă (ceea ce ar face-o să fie bijectivă).

VI. Analiza metodologică a secțiunii de teme pentru cercurile de elevi

Dacă prin *metodologie* înțelegem vorbire despre metodă, deci prezentarea, descrierea aplicarea și comentarea unor metode de investigație științifică, prin care se ajunge la obținerea unor rezultate teoretice, experimentale, observaționale, tehnologice, abstracte sau concrete, vom putea urmări, în mod deliberat, realizarea unor metodologii în orice activitate de investigație științifică.

Vom putea, de asemenea, transfera metodologiile din *domeniul investigației* în *cel al învățării*, dacă le angajăm în procese de comunicare sistematică, deliberată și competentă unor colective umane, cu scopul de a le face să-și însușească și să asimileze metodele realizate prin metodologiile respective.

Astfel de procese, organizate în cadrul învățămîntului, constituie *metodici de predare* a unor metodologii. Se pot comunica, descrie, demonstra, motiva și comenta numeroase și esențiale cunoștințe științifice cu titlu de *informație* sau *documentare*, dar aceste moduri de comunicare nu se încadrează în metodică. Aceasta necesită *organizarea unui proces de învățare, comunicarea de la instructor la instruit și verificarea eficacității instruirii* și acest proces complex justifică metodica în procesul de învățare.

Deși exercițiile și problemele de matematică stau la baza teoriilor matematice, ca niște acumulări cantitative, care la un moment potrivit fac saltul calitativ, care inițiază o teorie, ceea ce implică existența unei metode de investigație, nu există o preocupare deliberată și sistematică de crearea unor metodologii de rezolvare a problemelor matematice. Nu voim să afirmăm prin aceasta că nu există, totuși, metodologii de rezolvare, ci numai că preocupări de ordin metodologic nu apar nici în culegerile de probleme, nici în articolele din revistele de specialitate, nici metodele de predare a diverselor capitole ale disciplinelor matematice.

Există tehnici de rezolvare, algoritmi, artificii de calcul și chiar de raționament, practici eficiente, dar metode studiate din punct de vedere al domeniilor de aplicabilitate, diagnostice pentru anumite categorii de probleme, în care intervin tehnicile, algoritmii, strategiile de abordare, nu sînt prezentate în publicațiile care cultivă probleme. Ceea ce este mai surprinzător este faptul că nici manualele nu cultivă metodologii de rezolvare decît în măsura în care acestea

Scanned with OKEN Scanner

sînt aplicații directe sau imediate ale teoriilor predate. Nu există metodici de rezolvare cum sînt cele de predare a cunoștințelor, ca și cum rezolvarea de probleme ar fi o consecință firească a însușirii și asimilării cunoștințelor. Exercițiile și problemele plasate în finalul capitolelor din manuale sînt, adesea, deosebit de dificile, fiind selectate din diverse culegeri sau din manuale, reviste, monografii și tratate care nu au obiective didactice primordiale.

În ultimii ani s-a înființat o mișcare de promovare a metodologiilor de rezolvare, prin care se grupează unele probleme pe categorii nu tematice, ci metodologice. Autori binecunoscuți ca specialiști și cu preocupări de comunicare a cunoștințelor și tehnicilor de care dispun, au încercat să analizeze, din punct de vedere metodologic, grupările pe care le fac sau le descoperă și le iau în obiectiv. Ei caută să ofere cititorului metode largi, dar prezentînd coeziuni inspiratoare pentru aplicarea lor în probleme care își așteaptă rezolvarea, discută structura și tehnicile acestor metode și le exemplifică prin probleme. De obicei, însă, soluțiile sînt numai schițate și adesea indicațiile sumare date nu sînt suficiente pentru rezolvare. Pe parcursul aplicării apar întrebări la care cititorul este obligat să răspundă printr-un efort personal, poate chiar mai mare decît cel necesar înțelegerii și fructificării metodelor.

Astfel de metodologii sînt revelatoare pentru etapa de abordare a problemelor, dar insuficiente pentru ducerea lor la bun sfîrșit. De aceea, ideea de a oferi cititorilor de toate categoriile, începînd cu elevii de gimnaziu, dar trecînd fără ostentație și la cei de liceu, la studenți, la profesori și la oricine iubește și gustă matematica pentru satisfacția exigențelor sale estetice, o secțiune ca cea de față în care problemele sînt grupate metodologic, nu tematic, nu pe discipline, ci pe permeabilitatea la infuzia unor metode ce rezultă din principii, operații fundamentale, modelarea unor fapte și situații apare, credem, ca inspirată și bine gîndită.

Intitulată, în subtitlu, sugestiv, *Matematica gimnazială dincolo de manual*, secțiunea promovează ideea unor metodologii de rezolvare a problemelor. Într-adevăr, *principiul cutiei* nu rezultă din axiome, ci din situații de fapt care se cer rezolvate. Aceleași observații se adaptează *relației de ordine*, din care rezultă operații de ordonare esențiale, prin care se pot modela fenomene și procese, atît matematice cît și din orice sector al cunoașterii și practicii. Excelentă este și ideea de a atrage atenția asupra *operațiilor de numărare*, în aparență elementare, dar, în fapt, fundamentale și susceptibile de a prezenta dificultăți greu de trecut.

Dacă ne întoarcem în trecut, la sursele din care a extras matematica însăși substanța sa, vom găsi numeroase noțiuni, operații și relații în jurul cărora s-au adunat probleme variate, dar însuflețite de o unitate de concepție, din care se extrag metode de rezolvare înfrățite de un spirit metodologic.

Una dintre acestea este cea de *pătrat perfect*, cu extensiunile ei imediate ca cea de cub perfect, de parte întreagă a unui număr natural, cu prelungiri, adesea suculente și atrăgătoare, ca cele de număr poligonal sau, și mai general, de număr figurativ.

La prima vedere, acestea par distractive pentru începători, care se zbat între concret și abstract, dar, în fapt. dau naștere la probleme neașteptate și adesea greu de abordat fără o pregătire prealabilă.

O altă noțiune elementară și naturală este cea de *medie aritmetică*. În viața de toate zilele ea joacă un rol de seamă, fiind un prim indicator de valoare într-o mulțime finită de valori numerice. În matematică a apărut ca model al unui astfel de indicator și, împreună cu *media geometrică*, ce furnizează un al doilea indicator, intervine în numeroase probleme teoretice sau aplicative. Să nu uităm, de exemplu, că ponderata medie aritmetică ne permite să determinăm centrul unui sistem de mase materiale—centrul de greutate. Un alt loc unde apar, uneori ca salutare, mediile aritmetică și geometrică este în stabilirea unor inegalități care, prin alte metode, nu se știe dacă s-ar putea stabili.

Acestor noțiuni, la îndemîna oricărui începător, le sînt consacrate paragrafe metodologice speciale, probleme propuse și comentarii din care rezultă că împreună constituie instrumente puternice de investigație, a căror lipsă din trusa de unelte a oricărui matematician constituie o pagubă ce se poate manifesta oricînd.

O atenție deosebită merită și studiul, pe exemple, al operațiilor de *sume și produse finite*, care se bucură, de asemenea, încă din antichitate, de aportul unor mari matematicieni. Numeroase probleme se pun și se pot pune, soluții ingenioase apar, adesea, în comentariile care însoțesc rezolvările, aduc sugestii fructuoase și conduc la generalizări remarcabile. Este suficient să citățm o problemă în care se cere exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a unui produs de numere consecutive ca $31 \cdot 32 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60$. Generalizarea vine de la sine la un produs de forma $(n+1)(n+2)\ldots(2n)$, unde se descoperă că exponentul lui 2 va fi n, deci egal cu numărul factorilor produsului.

În teoria numerelor naturale, relația par-impar a constituit o preocupare veche a geometrilor și filozofilor greci. Ea nu și-a pierdut actualitatea, fiind însă, bineînțeles, raportată la tema-

Scanned with OKEN Scanner

tica actuală și la nivelul construcțiilor și tehnicilor noastre. *Problemele care implică noțiuni de paritate* ocupă, și ele, un loc semnificativ în secțiunea de față și dovedesc, încă odată, că noțiunile elementare pot fi sursa unor probleme frumoase, utile și sugestive. Ce altceva s-ar putea spune despre o problemă ca cea în care se cere să se arate că în mulțimea $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$, unde $n > 2$ este un număr natural, numărul fracțiilor ireductibile este par? Secțiunea conține multe probleme, dintre care nu lipsesc nici cele de geometrie, interesul acestora fiind remarcabil.

În cadrul acestei culegeri am pus în evidență, de mai multe ori, importanța fundamentală a noțiunii de *mulțime*. Marile controverse de ordin psihologic și pedagogic, care au fost stîrnite de introducerea acestei noțiuni chiar de la grădiniță, pun în discuție și, uneori, chiar condamnă ca ininteligibilă ideea de a se fundamenta învățămîntul primar și apoi celelalte grade succesive de învățămînt pe noțiunea de mulțime.

Fără a fi partizani ai celor care fac din ea un fundament indispensabil, ba chiar fiind siguri că introducerea ei, fără discernămîntul cerut de stadiul de dezvoltare psihologică și intelectuală a copiilor este mai dăunătoare decît algoritmizarea operațiilor cu numere naturale, avem convingerea că dezvăluirea prezenței acestei noțiuni fundamentale, pe care CANTOR a intuit-o și a modelat-o matematic, este, într-adevăr, o necesitate. Totuși, modul în care este transmisă copiilor este de o categorică responsabilitate. După cum omenirea a trăit mii de ani fără să-și dea seama că mulțimea este la baza tuturor noțiunilor matematice, tot așa și elevii pot învăța matematică fără să știe explicit că lucrează cu mulțimi. Dacă însă ajung să le simtă semnificația practică, nu cea teoretică, ei vor fi în stăpînirea unui nou instrument de înțelegere și folosire a matematicii.

Am dat numeroase aplicații ale mulțimilor și operațiilor de bază cu ele, urmărind mereu să facem din mulțimi, submulțimi și elemente de mulțimi modele ale unor obiecte, părți din obiecte, particule etc. Au apărut multe probleme care altă dată nu erau măcar cunoscute elevilor, deși formulările lor concrete făceau parte din întîmplări, situații, relații, năzuințe sau cerințe din viața socială. Astfel de probleme pledează mai bine decît orice expunere abstractă pentru integrarea noțiunii de mulțime în cultura fiecăruia dintre noi.

De aceea, subliniem în mod deosebit în secțiunea de față problemele capitolului *Mulțimi. Partiții ale unei mulțimi*. Ele se adresează, ca și celelalte pe care le-am trecut în revistă, în special cercurilor de elevi, dar sînt instructive pentru oricine. De exemplu, o problemă în care se dă mulțimea primelor o sută de numere naturale și din ea se extrage la întîmplare o submulțime formată din 19 elemente, cerîndu-se să se arate că în această submulțime există două elemente a căror sumă este egală cu 104, este suprinzătoare. Ea devine instructivă, dacă se aplică principiul cutiei, care conduce la rezolvare.

Interesantă și sugestivă este și problema mulțimii cu 4 elemente din care se aleg 8 submulțimi cu proprietatea cu oricare trei dintre ele să aibă un element comun. Atunci se arată că toate aceste submulțimi au un element comun. În cazul cînd mulțimea este formată din 4 puncte din spațiu, proprietatea capătă un caracter geometric. Toate problemele acestui capitol privesc mulțimi finite și conduc la adîncirea spiritului de analiză a situațiilor în care intervin un număr finit de elemente în diverse relații.

Nu putem încheia această analiză, care pune în lumină o lucrare în care problemele sînt grupate pe liniile directoare ale unor metode generale de rezolvare ce se impun de la sine, atunci cînd se urmărește cîștigarea unor metodologii cuprinzătoare, fără a atrage atenția că această secțiune este rezultatul parțial al prilejului pe care autorul ei l-a avut ca în ultimii zece ani să se afle în apropierea unora dintre cei mai buni elevi la matematică din țară, adică a acelora care formează lotul olimpic.

Discuțiile purtate cu ei au dus la concluzia că, la nivel gimnazial, nu există încă suficiente lucrări care să se adreseze elevilor cu aptitudini. Predînd peste 20 de ani la clase gimnaziale și la clase de liceu, autorul încearcă, din experiența acumulată, prin temele prezentate, să pună la dispoziția elevilor din gimnaziu o parte a unui material care să faciliteze abordarea problemelor date la barajele pentru selecționarea în lotul olimpic lărgit și a unora dintre problemele propuse în spiritul celor de la O.I.M.

Se cuvin, deci, mulțumiri tuturor celor care au încurajat ideea redactării acestei prime secțiuni a sugestiilor pentru temele cercurilor de elevi și, în special, elevilor care au parcurs materialul de față LUANA COJOCARU și FLORIN POPESCU și, în mod special, lui CĂTĂLIN TOADER, ale căror observații s-au dovedit, de fiecare dată, utile.

Scanned with OKEN Scanner

PRINCIPIUL CUTIEI

Vrem să aşezăm în două cutii trei bile. Oricum am face această aşezare, cu necesitate într-o cutie trebuie să punem mai mult de o bilă.

Mai general, dacă repartizăm un număr mai mare de n obiecte în n clase, atunci cel puţin într-o clasă vor fi cel puţin două obiecte.

Acest principiu simplu, numit adesea şi principiul lui DIRICHLET, are numeroase aplicaţii.

Dăm, în continuare, două exemple ale aplicării *„principiului cutiei"* :

A. *Arătaţi că, oricare ar fi trei numere naturale, se găsesc întotdeauna printre ele două a căror sumă este un număr par.*

Dacă primele două sînt de aceeaşi paritate, problema este rezolvată. Dacă nu, al treilea are, cu necesitate, aceeaşi paritate cu unul dintre primele două, deci suma lor este un număr par.

B. *Într-un sertar se află mai multe bile care diferă numai prin culoare. Dacă sînt bile de 3 culori diferite, care este numărul minim de bile pe care trebuie să le scoatem din sertar, fără a privi înăuntru, pentru a fi siguri că am scos cel puţin două bile de aceeaşi culoare?*

Dacă scoatem două bile, s-ar putea ca ele să fie de aceeaşi culoare. Acesta este răspunsul?! Bineînţeles că nu, pentru că trebuie să fim siguri că sînt două de aceeaşi culoare. Dacă scoatem 3 bile, s-ar putea ca ele să fie toate de culori diferite, deci nici acum nu avem siguranţa că am scos două bile de aceeaşi culoare. Dacă scoatem însă patru bile, chiar în cazul cel mai nefavorabil, cînd primele trei au fost de culori diferite, a patra trebuie să aibă aceeaşi culoare cu una din cele precedente, deci numărul minim este 4.

Pentru ca problema să fie posibilă, este necesar ca în cutie să existe cel puţin 4 bile.

Prezentăm, în continuare, cîteva probleme care se rezolvă cu ajutorul principiului lui DIRICHLET.

PROBLEME COMENTATE

1. Într-o şcoală sînt 731 de elevi. Arătaţi că există cel puţin 3 elevi care îşi serbează ziua de naştere în aceeaşi zi a anului (se va considera anul de 365 de zile).

Soluţie. Să presupunem că nu există trei astfel de elevi. Înseamnă că în fiecare zi a anului îşi serbează ziua de naştere cel mult doi elevi. Dacă în fiecare zi a anului îşi vor serba ziua de naştere doi elevi atunci, în total, într-un an, şi vor serba ziua de naştere $365 \cdot 2 =$

Scanned with OKEN Scanner

= 730 de elevi. Dar în şcoală sînt 731 de elevi, deci cel de-al 731-lea elev îşi va serba ziua împreună cu alţi doi.

Comentariu. Negaţia propoziţiei *„există cel puţin trei"* este *„există cel mult doi"*, şi noi am considerat cazul cînd, în fiecare zi, *„există exact doi"*, adică maximul posibil care nu satisface problema.

În general, cînd într-o problemă se cere să se arate că există cel puţin n elemente cu o anumită proprietate, este bine să considerăm că există cel mult $n - 1$ elemente cu acea proprietate şi, din analiza cazului *„exact* n — 1", se ajunge la soluţia problemei.

2. La etapa întîi a Olimpiadei de matematică, dintr-o clasă de 40 de elevi, 25 de elevi au rezolvat prima problemă, 30 de elevi au rezolvat problema a doua, 35 de elevi au rezolvat problema a treia şi 33 de elevi au rezolvat problema a patra.

Să se arate că cel puţin trei elevi au rezolvat toate cele patru probleme.

Soluţie. Presupunem că nici un elev nu a rezolvat toate cele patru probleme, deci fiecare elev a rezolvat cel mult trei. Dacă fiecare elev a rezolvat cîte trei probleme, atunci cei 40 de elevi au rezolvat un total de $40 \cdot 3 = 120$ de probleme.

Dar numărul de probleme rezolvate de cei 40 de elevi este $25 + 30 + 35 + 33 = 123$. Deci avem, în plus, 3 probleme rezolvate, de unde rezultă că cel puţin 3 elevi au rezolvat toate cele 4 probleme.

Comentarii. 1). La ambele probleme rezolvate pînă acum am arătat, în plus, cînd se realizează minimul fiecăreia. De exemplu, la problema numărul 2, exact 3 elevi au rezolvat toate cele 4 probleme în cazul în care toţi ceilalţi 37 de elevi au rezolvat cîte 3 probleme.

2). Se poate încerca rezolvarea problemei nr. 2 cu ajutorul unor diagrame.

3. La un concurs judeţean de matematică participă 300 de elevi, repartizaţi în mod egal în 15 săli. Să se afle:

a) Cel mai mic număr de fete care ar trebui să participe ştiind că, indiferent cum s-ar face repartizarea, în fiecare sală să fie cel puţin o fată;

b) Cel mai mare număr de fete care ar putea să participe astfel încît, indiferent de modul în care se face repartizarea pe săli, să existe o sală numai cu băieţi.

Soluţie. a) Putem gîndi problema în două feluri:

I. Să presupunem că există o sală în care, indiferent cum s-ar face repartizarea în celelalte săli, nu se află nici o fată.

Această situaţie este posibilă în cazul extrem cînd, în celelalte 14 săli, sînt numai fete, deci un număr de $14 \cdot 20 = 280$ de fete. Dacă mai există cel puţin o fată, atunci precis şi în a 15-a sală vor fi fete.

Deci, numărul minim căutat este 281.

II. Punctul a) al problemei este echivalent cu enunţul: „Să se afle numărul maxim de băieţi astfel încît, indiferent cum s-ar face repartizarea, să nu existe nici o sală numai cu băieţi".

Rezultă de aici că, chiar în cazul în care toţi băieţii sînt repartizaţi în aceeaşi sală aşa ca ei să nu completeze toate cele 20 de locuri, numărul maxim de băieţi este 19. Rămîne că numărul minim de fete este $300 - 19 = 281$.

Comentariu. Am transformat problema de minim al unui eveniment în problemă de maxim a evenimentului contrar.

b) I. Presupunem că într-o singură sală sînt numai băieţi. Atunci, în celelalte 14 săli trebuie să fie cel mult cîte o fată. Deci, numărul maxim de fete este 14.

II. Să aflăm numărul minim de băieţi astfel încît, oricum s-ar face repartizarea, să fie o sală numai cu băieţi. Dacă în primele 14 săli am aşeza cîte 19 băieţi, iar în a 15-a, 20 de băieţi, înseamnă că am realizat minimul necesar: $14 \cdot 19 + 20 = 286$. Rămîne că numărul maxim de fete este $300 - 286 = 14$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Se pot transporta dintr-o carieră 50 de blocuri de piatră, avînd greutăţile 370 kg, 372 kg, 374 kg, ..., 466 kg, cu 7 camioane de cîte 3 tone? (Fiecare piatră, începînd cu a doua, are cu două kilograme mai mult decît precedenta).

Notă. Fiecare camion face un singur transport.

Soluţie. Sîntem tentaţi să aflăm masa totală şi apoi să împărţim la numărul camioanelor. Procedînd astfel, obţinem:

$$370 + (370 + 2) + (370 + 4) + \ldots + (370 + 98) = 50 \cdot 370 + 2 + 4 + \ldots + 98 =$$

$$= 50 \cdot 370 + 2(1 + 2 + \ldots + 49) = 50 \cdot 370 + 2\,(24 \cdot 50 + 25) = 20\,950.$$

Cum $20\,950 : 7 < 3\,000$, se pare că se pot transporta cele 50 de pietre cu 7 camioane.

Să recităm problema. Trebuie transportate blocuri de piatră şi nu, de exemplu, nisip. Pentru a încărca 50 de blocuri de piatră în şapte camioane este necesar ca într-un camion să punem mai mult de 7 pietre (principiul cutiei). Dacă am pune cel mult 7 pietre într-un camion vom transporta cel mult $7 \cdot 7 = 49$ de pietre. Să presupunem că într-un anumit camion am pus exact 8 blocuri de piatră. Chiar dacă le-am pune pe cele mai uşoare, ele cîntăresc:

$$370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 3\,016 \text{ kg},$$

ceea ce depăşeşte capacitatea camioanelor.

În consecinţă, nu se pot transporta cele 50 de blocuri cu 7 camioane.

Comentariu. Esenţial în rezolvare a fost aspectul „practic" al problemei. În multe probleme în care se cere să decidem dacă un fenomen este sau nu posibil este necesar, în cazul răspunsului afirmativ, să dăm şi modelul de realizare.

5. Fiind date $n + 1$ numere naturale, atunci cel puţin două dintre ele dau, la împărţirea cu n, acelaşi rest ($n \in \mathbb{N}^*$).

Soluţie. Folosim teorema împărţirii numerelor naturale: fiind date două numere naturale m şi n, $n \neq 0$, există în mod unic două numere naturale q şi r astfel încît:

$$m = n \cdot q + r$$

cu $r < n$.

Deci, există exact n valori posibile pentru r:

$$0, 1, 2, \ldots, n - 2, n - 1.$$

Cum împărţim cu n un număr de $n + 1$ numere rezultă că vor exista $n + 1$ resturi dintre care cel mult n sînt distincte. Rămîne că cel puţin de două ori va rezulta acelaşi rest.

Comentariu. Faptul că la împărţirea oricărui număr natural la n nu se pot obţine mai mult de n valori pentru rest joacă un rol important în diverse probleme de aritmetică, şi nu numai de aritmetică.

Putem, cu uşurinţă, împărţi numerele naturale în mai multe clase, considerînd resturile împărţirii la un anumit număr.

De exemplu, la împărţirea cu 2 se obţin numai resturile 0 şi 1. Deci numerele naturale se pot împărţi în două clase:

— clasa celor care dau, la împărţirea cu 2, restul 0 (numerele pare) şi care sînt de forma $2k$, $k \in \mathbb{N}$;

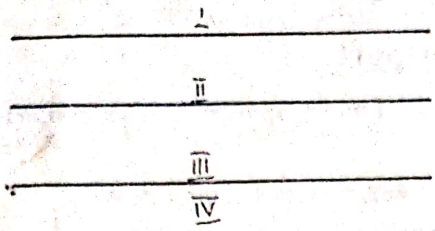
— clasa celor care dau, la împărţirea cu 2, restul 1 (numerele impare), şi care sînt de forma $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

La împărţirea cu 3 a numerelor naturale vom avea 3 clase, iar numerele vor avea formele $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

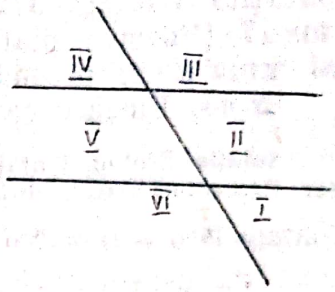
6. Trei drepte distincte situate într-un plan împart planul în mai multe regiuni disjuncte. Să se arate că, oricum s-ar aşeza 8 puncte în acest plan, astfel încît nici unul să nu aparţină dreptelor date, cel puţin două dintre ele se află în aceeaşi regiune.

Scanned with OKEN Scanner

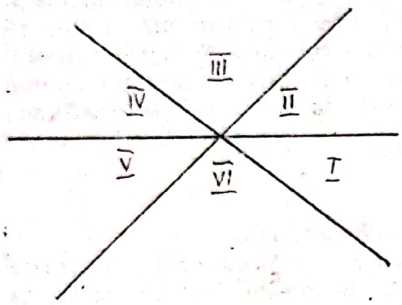
Soluție. Dreptele fiind distincte, ele se află numai în una dintre situațiile:



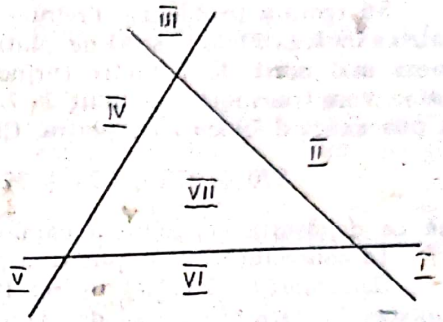
a)



b)



c)



d)

„Căsuțele" din principiul cutiei sînt acum aceste regiuni. Observăm că numărul maxim de regiuni se obține pentru cazul din figura d).

Dacă am așeza cîte un punct în fiecare regiune, ar fi necesare maximum 7 puncte. Avînd, însă, 8 puncte, rezultă că în cel puțin o regiune vor fi două puncte.

Comentariu. Problema ar fi fost mai interesantă dacă o formulam astfel:

a) Să se determine poziția a 3 drepte distincte situate într-un plan astfel încît, oricum am așeza 8 puncte în acest plan, nici unul neaparținînd dreptelor date, cel puțin două să se afle în aceeași regiune.

b) Demonstrați că, o condiție necesară și suficientă pentru ca două drepte distincte să fie paralele, este ca, oricum am așeza 5 puncte în planul ce le conține, astfel încît niciunul să nu aparțină acestor drepte, cel puțin două dintre aceste puncte să fie situate în aceeași regiune a planului determinat de cele două drepte.

c) În cîte regiuni disjuncte pot împărți planul 4 drepte distincte?

d) Se poate demonstra, prin metode ce depășesc cunoștințele folosite în gimnaziu, că n drepte situate într-un plan, astfel încît oricare două dintre ele nu sînt paralele și oricare trei nu sînt concurente, împart planul în $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ regiuni.

7. Se dau n numere naturale nenule distincte, toate mai mici strict decît $2n$. Să se demonstreze că printre ele există unul egal cu n sau două a căror sumă este $2n$.

Soluție. Dacă $0 < a < 2n$, atunci și $0 < 2n - a < 2n$. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cele n numere. Atunci și $2n - a_1, 2n - a_2, \ldots, 2n - a_n$ îndeplinesc condițiile din enunț. Considerăm numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, 2n - a_1, 2n - a_2, \ldots, 2n - a_n$. Ele sînt în număr de $2n$. Dar, în intervalul $(0, 2n)$ există numai $2n - 1$ numere naturale distincte. Rezultă, cu necesitate, conform principiului cutiei, că cel puțin două dintre cele $2n$ numere sînt egale și anume unul din mulțimea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ va fi egal cu unul din mulțimea $\{2n - a_1, 2n - a_2, \ldots, 2n - a_n\}$. Fie ele a_i, respectiv $2n - a_j$, $i, j \in \overline{1, n}$. Deci $a_i = 2n - a_j$ sau $a_i + a_j = 2n$. Dacă $i = j$ obținem $2a_i = 2n$, deci $a_i = n$, iar dacă $i \neq j$, obținem $a_i + a_j = 2n$.

Comentariu. Problema aduce un element nou și anume cere să demonstrăm că cel puțin una dintre alternative se realizează.

Este posibilă realizarea simultană a celor două alternative?

Scanned with OKEN Scanner

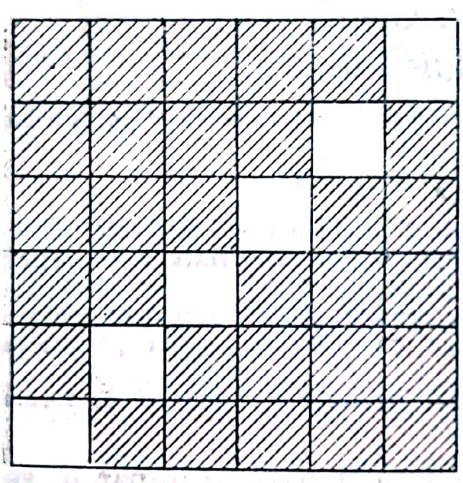
8. Un pătrat cu latura de lungime n, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, este împărțit prin drepte paralele la laturi în n^2 „căsuțe" cu latura de lungime 1. Este posibil să colorăm cu aceeași culoare $n^2 - n$ „căsuțe", fără ca vreun dreptunghi de dimensiuni $1 \times n$ sau $n \times 1$ să fie în întregime colorat? Care este numărul minim de „căsuțe" ce trebuie colorate pentru ca, oricum s-ar face colorarea, cel puțin un dreptunghi cu dimensiunile $1 \times n$ sau $n \times 1$ să fie în întregime colorat?

Soluție. Să presupunem că, pe fiecare „coloană" (dreptunghi de dimensiuni $1 \times n$), colorăm cîte $n - 1$ „căsuțe". Deci, în total, avînd n „coloane", vom colora $n \cdot (n-1) = n^2 - n$ „căsuțe", fără a colora o coloană în întregime. Se pune întrebarea dacă nu cumva, oricum am face colorarea, apare o „linie" (dreptunghi de dimensiuni $n \times 1$) colorată în întregime. Trebuie, neapărat, să realizăm un model.

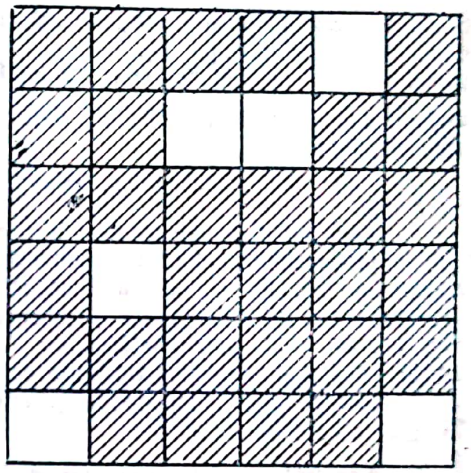
Analizînd cele două modele este clar că răspunsul la prima întrebare a problemei este afirmativ (v. fig. a); în modelele considerate am luat cazul $n = 6$.

Observăm, în continuare, că este suficient să mai colorăm o singură „căsuță" pentru a exista cel puțin o „coloană" în întregime colorată. Deci, numărul minim căutat este $n^2 - n + 1$.

Comentarii. 1). Este necesar să observăm că, atunci cînd colorăm $n^2 - n + 1$ „căsuțe", obținem cel puțin o „coloană" și cel puțin o „linie" în întregime colorate.



a)



b)

2). În legătură cu această problemă se mai poate pune următoarea întrebare:

În cîte moduri se poate face colorarea a $n^2 - n$ căsuțe, astfel încît să nu existe nici o „linie" și nici o „coloană" complet colorate?

9. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_9$ o rearanjare a numerelor $1, 2, 3, \ldots, 9$. Să se arate că numărul $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_9 - 9)$ este par.

Soluție. Printr-o rearanjare a numerelor 1, 2, 3 înțelegem scrierea lor într-o altă ordine. Astfel, numerele 1, 2, 3 se pot rearanja în următoarele moduri: (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (3, 2, 1). Aceste rearanjări se mai numesc și *permutări*.

Printre numerele $a_1, a_2, \ldots, a_9$, cinci sînt impare și patru pare. Produsul mai multor numere întregi este par dacă și numai dacă cel puțin un factor este par.

Dacă în unul din factorii $a_2 - 2$, $a_4 - 4$, $a_6 - 6$, $a_8 - 8$, unul dintre numerele a_2, a_4, a_6, a_8 este par, problema este rezolvată.

Să presupunem că numerele a_2, a_4, a_6, a_8 sînt toate impare și să nefixăm atenția asupra celorlalți factori, $a_1 - 1$, $a_3 - 3$, $a_5 - 5$, $a_7 - 7$, $a_9 - 9$. Știm că 5 numere sînt impare și cum 4 le-am folosit în presupunerea anterioară, rezultă, cu siguranță, că unul dintre numerele a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 este impar. Cum din el se scade tot un număr impar, factorul respectiv devine par, deci întreg produsul este par.

Comentarii. 1). O soluție mai simplă, care însă nu are legătură cu tematica acestui capitol, este următoarea:

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem că numărul $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_9 - 9)$ este impar. Deci, fiecare factor în parte este un număr impar. Suma $(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \ldots + (a_9 - 9)$ este suma unui număr impar de numere impare, deci este impară.

Pe de altă parte:

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \ldots + (a_9 - 9) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_9) - (1 + 2 + \ldots + 9) = 0.$$

Am obținut o contradicție, deci numărul $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_9 - 9)$ este par.

2). Problema admite următoarea generalizare:

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o permutare a numerelor $1, 2, \ldots, n$. Să se demonstreze că produsul:

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_n - n)$$

este par, dacă n este impar.

10. Să se arate că, oricare ar fi numerele întregi a, b, c, d, numărul:

$$abcd\,(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(a^2 - d^2)(b^2 - c^2)(b^2 - d^2)(c^2 - d^2)$$

este multiplu de 7.

Soluție. Restul împărțirii unui număr întreg x la 7 este unul dintre elementele mulțimii:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Fie $x = 7k + r$, unde $k \in \mathbb{Z}$, iar $r \in A$. Calculăm x^2. Avem:

$$x^2 = (7k + r)^2 = 49k^2 + 14kr + r^2 = 7(7k^2 + 2kr) + r^2,$$

unde $r^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}$. Dînd, pe rînd, aceste valori lui r^2, observăm că x^2 poate avea una din formele:

$$x^2 = 7p,\ x^2 = 7p + 1,\ x^2 = 7p + 2,\ x^2 = 7p + 4.$$

Dacă unul dintre numerele a, b, c, d este multiplu de 7, problema este rezolvată.

Să presupunem că nici unul dintre ele nu este multiplu de 7. Atunci resturile împărțirii numerelor a^2, b^2, c^2, d^2 la 7 aparțin mulțimii $B = \{1, 2, 4\}$.

Avînd patru pătrate și numai trei resturi posibile rezultă că cel puțin două pătrate dau același rest la împărțirea cu 7 și atunci factorul egal cu diferența acestor pătrate se divide cu 7. Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Comentariu. Demonstrația era mai „comodă" cînd consideram numerele de forma $7k \pm r$, cu $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.

11. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural impar a, se găsește un număr natural b astfel încît $2^b - 1$ se divide la a.

Soluție. Orice număr întreg x se poate scrie sub forma $x = aq + r$, unde $q \in \mathbb{Z}$, iar $r \in \{0, 1, 2, \ldots, a - 1\}$.

Pentru a fixat, vom încerca să găsim numărul b care să satisfacă problema.

Fie numerele:

$$2^0 - 1, 2^1 - 1, 2^2 - 1, \ldots, 2^a - 1.$$

Evident, aceste $a + 1$ numere sînt distincte două cîte două. Împărțindu-le, pe rînd, la a, vom obține $a + 1$ resturi. Cum la împărțirea cu a putem obține numai a resturi distincte rezultă, cu siguranță, că cel puțin două dintre numerele considerate dau același rest la împărțirea cu a. Fie ele $2^m - 1$ și $2^n - 1$, cu $m, n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, a\}$ și $m < n$.

Numărul $(2^n - 1) - (2^m - 1)$ se divide, precis, cu a. Dar:

$$(2^n - 1) - (2^m - 1) = 2^n - 2^m = 2^m(2^{n-m} - 1).$$

Pînă acum nu am folosit ipoteza că a este impar. Din faptul că a este impar rezultă că 2^m și a sînt prime între ele și deci $2^{n-m} - 1$ se divide la a. Rezultă că $b = n - m$.

Comentarii. 1). Modul cum au fost construite cele $a + 1$ numere a fost esențial în rezolvarea problemei. Sînt numeroase cazurile în care aplicarea „principiului cutiei" nu este evidentă și este necesară o construcție ajutătoare, ca în cazul de față.

Pentru $a = 5$ dăm următorul model: $2^0 - 1 = 0$, $2^1 - 1 = 1$, $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^4 - 1 = 15$, $2^5 - 1 = 31$. Resturile numerelor construite anterior la împărțirea cu 5 sînt 0, 1, 3, 2, 0, 1.

Scanned with OKEN Scanner

Există două perechi de numere care satisfac problema:

$$(2^4 - 1) - (2^0 - 1) = 2^4 - 1\,;\ (2^5 - 1) - (2^1 - 1) = 2(2^4 - 1).$$

și în ambele cazuri avem $b = 4$.

2). Analog se demonstrează următoarea afirmație mai generală:

Dacă numerele naturale a și c sînt prime între ele atunci există un număr natural b astfel încît $c^b - 1$ se divide prin a.

12. Fie mulțimea $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cu elemente numere întregi. Să se demonstreze că M are cel puțin o parte nevidă cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.

Soluție. Dacă $a \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$, există în mod unic două numere b și r astfel încît $a = nb + r$, $b \in \mathbb{Z}$ și $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Vom încerca să aplicăm „principiul cutiei". Considerăm următoarele n submulțimi ale lui M:

$$A_1 = \{a_1\},\ A_2 = \{a_1, a_2\},\ A_3 = \{a_1, a_2, a_3\},\ \ldots,\ A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Acestea au suma elementelor, respectiv:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Dacă unul dintre cele n numere, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, se divide la n, problema este rezolvată. Dacă nu, cele n resturi obținute prin împărțirea cu n a numerelor aparțin mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ care are $n-1$ elemente distincte. Rezultă, de aici, că există, cu siguranță, două numere S_i și S_j care dau același rest la împărțirea prin n. Fie:

$$S_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$$
$$S_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j$$

cele două numere.

Presupunem, de exemplu, că $i < j$. Atunci, cum n divide diferența $S = S_j - S_i$, rezultă că submulțimea căutată este $A = \{a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j\}$.

Comentarii. 1). Problema este deosebit de interesantă prin modul în care se construiesc cele n submulțimi.

2). În cadrul demonstrației nu a fost necesar să impunem condiția ca întregii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ să fie distincți. Concluzia rămîne adevărată și dacă nu toți acești întregi sînt distincți

13. Se dau n numere întregi notate cu $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $n \geqslant 2$. Să se demonstreze că există printre ele m numere, notate cu $b_1, b_2, \ldots, b_m$, $m \leqslant n$, astfel încît numărul $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_m^2$ să se dividă cu n.

Soluție. Dacă $a_k \in \mathbb{Z}$ rezultă că $a_k^2 \in \mathbb{N}$ și deci orice număr de forma $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_i^2$ este tot număr natural. Știm că la împărțirea oricărui număr natural la numărul natural n obținem unul din următoarele resturi: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Să considerăm următoarele $n+1$ numere naturale:

$$0,\ a_1^2,\ a_1^2 + a_2^2,\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,\ \ldots,\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2.$$

Conform problemei nr. 5, există printre aceste numere cel puțin două care dau același rest la împărțirea cu n. Fie ele, de exemplu, numerele $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ și $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2 + \ldots + a_p^2$. Atunci diferența:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2 + \ldots + a_p^2) - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2) = a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \ldots + a_p^2$$

este precis divizibilă cu n pentru că:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + a_{k+1}^2 + \ldots + a_p^2 = \mathcal{M}n + r,$$

iar:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = \mathcal{M}n + r,\ r \in \mathbb{N},\ r < n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă, deci, că numărul $a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2 + \ldots + a_p^2$ este numărul căutat. Deci:

$$b_1 = a_{k+1};\ b_2 = a_{k+2};\ \ldots;\ b_m = a_p.$$

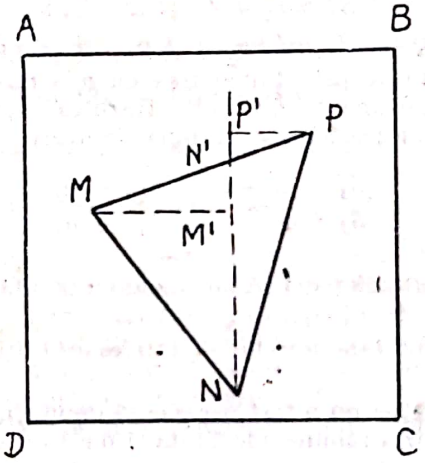
Comentarii. 1). În cazul considerat m este $p - k$.

2). Am folosit şi numărul 0 printre cele $n + 1$ numere fiindcă, în cazul în care $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$ ar fi divizibil cu n, atunci perechea sa, cu acelaşi rest la împărţirea cu n, ar fi chiar 0.

14. Fie nouă puncte într-un pătrat cu latura de lungime 1. Să se demonstreze că există un triunghi cu vîrfurile în trei din cele nouă puncte a cărui arie să fie cel mult egală cu $\frac{1}{8}$.

Soluţie. Unind două cîte două mijloacele laturilor opuse în pătratul dat, obţinem o împărţire a acestuia în patru pătrate de arie $\frac{1}{4}$. Oricum am plasa cele 9 puncte, întotdeauna trei se vor afla în interiorul sau pe laturile aceluiaşi pătrat.

Să demonstrăm acum că aria triunghiului cu vîrfurile în cele trei puncte este mai mică sau egală cu $\frac{1}{8}$. Fie M, N, P aceste trei puncte situate în pătratul $ABCD$ de arie $\frac{1}{4}$.



Ducînd prin M, N, P paralele la dreapta AD, una dintre acestea se va afla între celelalte două, deci va intersecta latura opusă punctului prin care trece.

Fie dreapta NN' această paralelă la AD, $N' \in [MP]$. Construim $MM' \perp NN'$ şi $PP' \perp NN'$. Avem:

$$\mathcal{S}_{\Delta MNP} = \mathcal{S}_{\Delta MN'N} + \mathcal{S}_{\Delta PN'N} = \frac{MM' \cdot NN'}{2} + \frac{NN' \cdot PP'}{2} =$$

$$= \frac{NN'(MM' + PP')}{2} \leqslant \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{S}_{\square ABCD} = \frac{1}{8}.$$

Comentariu. Pentru a rezolva complet problema este necesar să arătăm cînd se realizează egalitatea. Avem:

$$\mathcal{S}_{\Delta MNP} = \frac{NN'(MM' + PP')}{2} \leqslant \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{8},$$

deci vom obţine egalitatea dacă şi numai dacă $NN' \cdot (MM' + PP') = AD \cdot AB$, deci $NN' = AD$ şi $MM' + PP' = AB$. Rezultă că obţinem egalitate numai în cazul cînd o latură a triunghiului coincide cu o latură a pătratului şi celălalt vîrf al triunghiului se află pe latura opusă.

15. Pe o sferă cu raza de lungime 1 se iau la întîmplare 9 puncte. Demonstraţi că există două puncte a căror distanţă nu depăşeşte $\sqrt{2}$.

Soluţie. Căutăm şi aici să împărţim sfera în 8 regiuni egale. Realizăm acest lucru ducînd trei plane perpendiculare două cîte două, trecînd prin centrul sferei (v. figura 1). Planele sînt $(ABCD)$, $(AECF)$ şi $(BEDF)$.

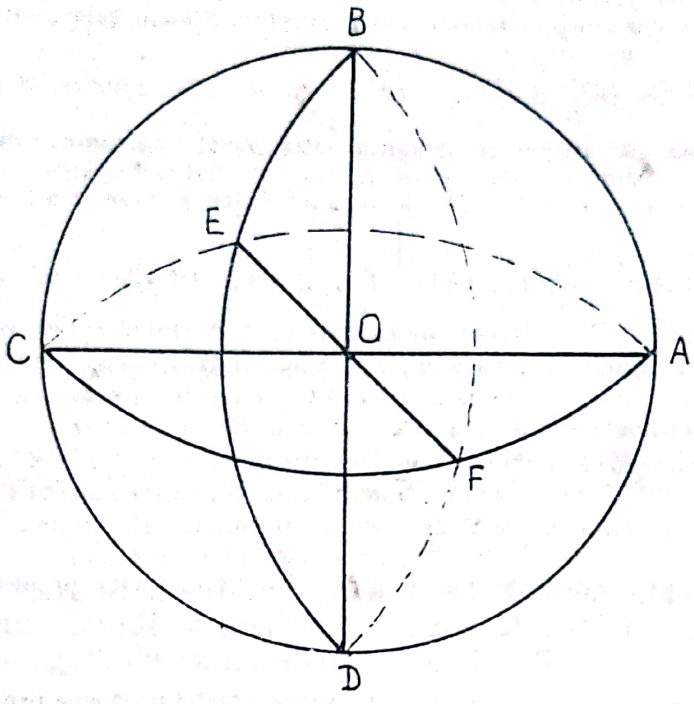


Fig. 1

Oricum am plasa cele nouă puncte, două vor fi, cu siguranţă, în aceeaşi regiune.

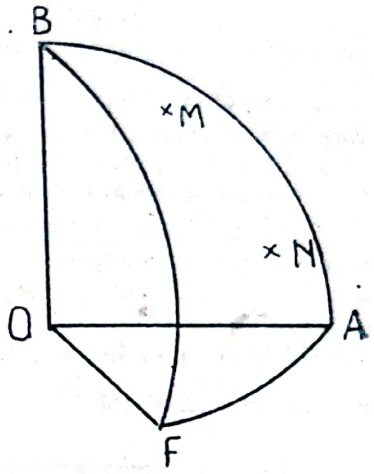


Fig. 2

Fie M şi N aceste puncte situate în regiunea din figura 2. Pentru orice poziţie a lor în această regiune:

$$d(M, N) \leqslant d(A, B) = d(B, F) = d(A, F).$$

Dar, din triunghiul dreptunghic AOB, $d(A, B) = \sqrt{2}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Comentariu. Se poate demonstra că sînt suficiente numai 5 puncte într-o sferă de rază 1 pentru a fi siguri că există două a căror distanţă nu depăşeşte $\sqrt{2}$.

16. Fie un cub cu latura de lungime 1. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puţin două dintre ele au distanţa strict mai mică decît $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Soluţie. Pentru a putea aplica principiul cutiei este normal să căutăm o împărţire a cubului în 27 de cubuleţe (căsuţe) egale. Acest lucru îl putem realiza astfel: împărţim muchiile $[A'B']$ şi $[C'D']$ în cîte 3 segmente congruente. Prin punctele M, N şi P, Q astfel obţinute, construim plane paralele cu faţa $AA'D'D$. Repetăm aceeaşi construcţie pentru perechile de muchii $([A'D'], [B'C'])$ şi $([AA'], [BB'])$. Am obţinut, astfel, 27 de cubuleţe cu muchia 1/3.

Să arătăm că, dacă două puncte se află în acelaşi cubuleţ (eventual şi feţele lor), distanţa dintre ele este mai mică decît $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Lungimea segmentului determinat de două astfel de puncte este mai mică sau cel mult egală cu lungimea diagonalei cubuleţului. Dar lungimea diago-

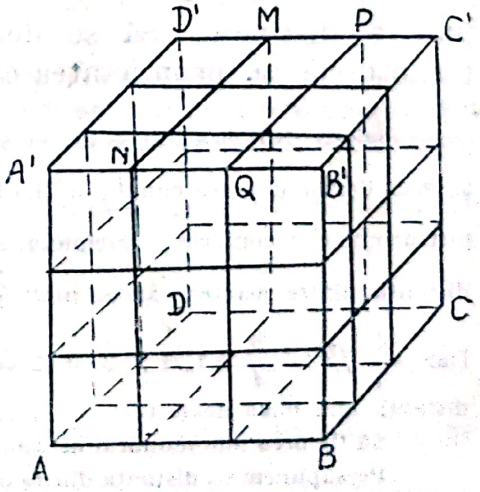


Fig. 1

nalei unui astfel de cub este $d = l\sqrt{3}$, adică, în cazul nostru, $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$. În concluzie, oricum am plasa cele 28 de puncte în *interiorul* cubului de latură 1, există cel puțin două puncte E și F situate în interiorul unui cub mic sau pe fețele acestuia, necomune cu fețele cubului dat, care îndeplinesc condiția $d(E, F) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Comentarii. 1). Problema cerea să arătăm că distanța este strict mai mică decît $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Deci problema nu este complet rezolvată. Să analizăm în ce caz se realizează egalitatea $d(E, F) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Evident, atunci cînd punctele E și F sînt vîrfurile unui cub aflat, în totalitate, în interiorul cubului dat. Cîte astfel de cuburi mici există? Sînt 9 cuburi mici care au cîte o față situată în planul $(ABCD)$; încă 9 care au cîte o față situată în planul $(A'B'C'D')$; îndepărtîndu-le pe acestea, rămîn 9 cuburi mici (v. fig. 2). Dintre acestea, 8 au fețe comune cu celelalte fețe ale cubului dat.

Rămîne un singur cub mic care are toate vîrfurile în interiorul cubului dat. Dacă E și F sînt extremitățile uneia dintre diagonalele acestui cub mic, atunci fiecare din acestea se află și pe alte 7 din cele 26 cuburi mici și deci distanța dintre E, de exemplu, și punctul aflat în unul din cele 7 cuburi mici care nu au vîrf tot pe E este strict mai mică decît $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Cu aceasta, problema este complet rezolvată.

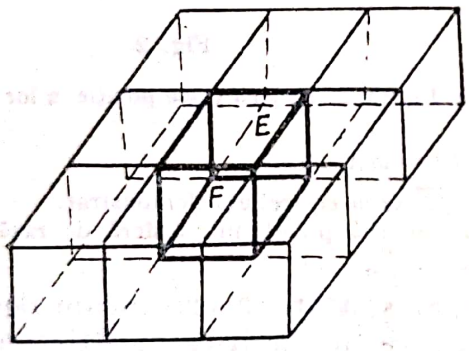


Fig. 2

Am insistat asupra acestei probleme pentru a scoate în evidență că ideea rezolvării este necesară, dar nu suficientă.

2). *Generalizare.* Se consideră $n^3 + 1$ puncte plasate într-un cub cu latura de lungime 1. Să se demonstreze că întotdeauna există cel puțin două puncte astfel ca distanța dintre ele să fie strict mai mică decît $\frac{\sqrt{3}}{n}$.

17. În interiorul unui cub cu latura de lungime 9 se consideră $12^3 + 196$ puncte distincte. Să se demonstreze că printre acestea există cel puțin două cu proprietatea că distanța dintre ele este mai mică decît 1.

Soluție. Numărul $12^3 + 196$ ne sugerează împărțirea fiecărei laturi în 12 părți congruente și, deci, descompunerea cubului inițial în 12^3 cuburi de latură $9 \cdot \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. Cel puțin într-un cub mic, conform „principiului cutiei", vor fi cel puțin două puncte din cele $12^3 + 196$, deci distanța dintre acestea este cel mult egală cu lungimea diagonalei unui cub, deci cel mult $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. Dar $\frac{3}{4}\sqrt{3} > \frac{3}{4} \cdot 1{,}71 > 3 \cdot 0{,}42 = 1{,}26$ și deci nu avem siguranța că există două puncte la distanță mai mică decît 1.

Să fie prea mic numărul de puncte dat?! Nu! Să urmărim următorul raționament:

Presupunem că distanța dintre oricare două puncte dintre cele $12^3 + 196$ considerate este mai mare sau egală cu 1. Considerăm sferele cu centrele în aceste puncte și cu razele de

Scanned with OKEN Scanner

lungime $\frac{1}{2}$. Acestea vor fi disjuncte două cîte două sau cel mult tangente exterior și incluse în cubul cu latura de lungime $9 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 10$, obținut prin intersecția planelor paralele cu fețele cubului dat și situate la distanța $\frac{1}{2}$ față de acesta.

În ipoteza formulată, cu siguranță, suma volumelor celor $12^3 + 196$ sfere este mai mică decît volumul cubului cu latura de lungime 10, adică :

$$(12^3 + 196) \cdot \frac{4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} = 1\,924 \cdot \frac{\pi}{6} > 1\,924 \cdot 0{,}52 = 1\,000{,}48 > 1\,000.$$

Deci presupunerea făcută este falsă. Rezultă, cu siguranță, că există cel puțin două puncte la distanță mai mică decît 1.

Comentariu. De data aceasta, prin problema prezentată, am vrut să atragem atenția că există și probleme în care, cu toate că datele par a conduce la „principiul cutiei", acesta este ineficient. În astfel de cazuri trebuie găsită o altă metodă de rezolvare.

18. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, \ldots, 1983\}$. Să se arate că, oricare ar fi submulțimea X cu 15 elemente a lui M, există două submulțimi nevide și disjuncte $A, B \subset X$ astfel încît suma elementelor lui A să fie egală cu suma elementelor lui B.

Soluție. Pentru rezolvarea acestei probleme este nevoie de următoarea precizare: numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n. Demonstrația acestei afirmații depășește cadrul gimnaziului. Verificăm afirmația pentru mulțimea $\{1, 2, 3\}$. Submulțimile sale sînt : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$, deci $8 = 2^3$ submulțimi.

Cum X are 15 elemente rezultă că X are $2^{15} = 32\,768$ submulțimi. Dintre acestea, $2^{15} - 1 = 32\,767$ sînt nevide.

Ne punem problema să aflăm ce valori poate lua suma elementelor unei submulțimi a lui X. Evident că dacă $1 \in X$ atunci submulțimea $\{1\}$ are suma elementelor egală chiar cu 1 și aceasta este cea mai mică valoare.

Submulțimea cu suma elementelor cea mai mare este chiar mulțimea X, dacă aceasta este formată din cele mai mari 15 elemente ale mulțimii date M, adică :

$$1\,983 + 1\,982 + \ldots + 1\,969 = 29\,640.$$

Rezultă că oricare ar fi $X \subset M$, X avînd 15 elemente, submulțimile lui X au suma elementelor în intervalul $[1, 29\,640]$, adică aceste sume pot lua 29 640 valori distincte. Cum numărul submulțimilor nevide ale lui X este 32 767, cu necesitate există două astfel încît suma elementelor fiecăreia să fie aceeași (conform principiului lui DIRICHLET).

Pînă acum nu am folosit cerința ca cele două mulțimi să fie disjuncte. Fie U și V cele două submulțimi ale lui X cu aceeași sumă a elementelor. Vom lua :

$$A = U - (U \cap V)$$

și

$$B = V - (U \cap V).$$

Mulțimile A și B astfel obținute satisfac cerințele problemei pentru că sînt, evident, disjuncte și suma elementelor fiecăreia este aceeași.

Comentarii. 1). Dacă se înlocuiește mulțimea $M = \{1, 2, \ldots, 1\,983\}$ cu $N = \{1, 2, \ldots, \ldots, 2\,499, 2\,500\}$, mai rămîne concluzia problemei adevărată?

2). Suma $S = 1\,983 + \ldots + 1\,969$ poate fi calculată mai rapid astfel :

$$S = 15 \cdot 1\,969 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 14 = 15 \cdot 1\,969 + \frac{14 \cdot 15}{2},$$

sau, observînd că suma termenilor egal depărtaţi de extremi este egală cu suma extremilor, rezultă :

$$S = \frac{(1\,969 + 1\,983) \cdot 15}{2}.$$

19. Se consideră un dreptunghi de dimensiuni 25 şi 20. Din interiorul lui se scot arbitrar 120 de pătrate (inclusiv laturile) cu laturile de lungime 1. Să se arate că se poate aşeza în suprafaţa rămasă un disc cu diametrul de lungime 1.

Soluţie. Enunţul arată că cele 120 de pătrate cu laturile de lungime 1 se scot arbitrar. În figura 1) sînt cîteva cazuri posibile.

Să mărim fiecare pătrat cu latura de lungime 1 cu o „bordură de siguranţă" cu lăţimea egală cu $\frac{1}{2}$, ca în fig. 2.

Porţiunea haşurată reprezintă, de fapt, locul geometric al punctelor cu distanţa cel mult $\frac{1}{2}$ faţă de laturile pătratului, neinterioare acestuia.

Aria unui astfel de „pătrat rotunjit" este egală cu :

$$1 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = 3 + \frac{\pi}{4} < 3 + \frac{3{,}2}{4} = 3{,}8.$$

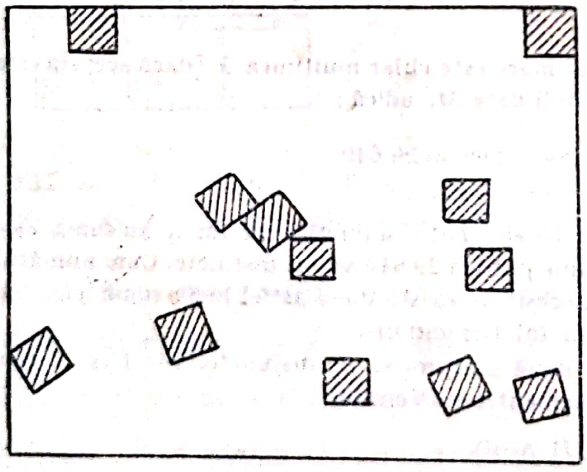


Fig. 1

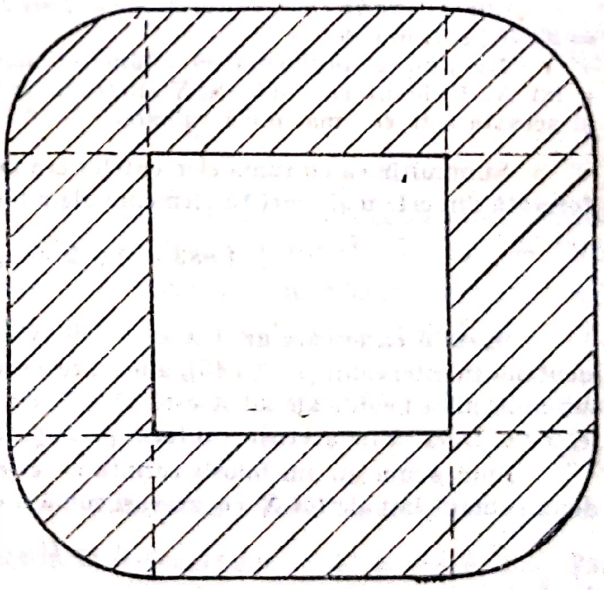


Fig. 2

Dacă cele 120 de astfel de „pătrate mici rotunjite" acoperă dreptunghiul haşurat (din fig. 3), înseamnă că nu sîntem siguri că, prin decuparea celor 120 pătrate de latură 1, rămîne o porţiune peste care se poate aşeza discul cu diametrul de lungime 1. Dacă însă acestea nu ocupă tot dreptunghiul haşurat atunci, cu siguranţă, există discul căutat. Mai mult, oricare din punctele neacoperite poate fi luat drept centru pentru un astfel de disc.

Scanned with OKEN Scanner

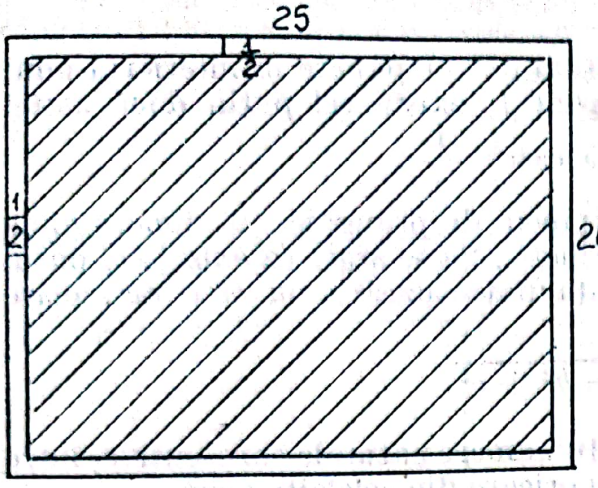


Fig. 3

Aria celor 120 de „pătrate mici rotunjite" este :

$$S_1 = 120\left(1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) <$$

$$< 120 \cdot 3{,}8 = 456,$$

iar aria dreptunghiului haşurat de dimensiuni 19 şi 24 este $S = 19 \cdot 24 = 456$ şi deci :

$$S > S_1.$$

Cu aceasta, problema este complet rezolvată.

Comentarii. 1). Problema prezentată este un exemplu elocvent de aplicare a „principiului cutiei" în geometrie şi, după cum s-a văzut, chiar în rezolvarea unor probleme care nu sînt deloc banale.

2). La o analiză mai atentă a problemei se observă că ar fi trebuit adăugată la aria S_1 şi „perimetrele" pătratelor de latură 1, dar convenim să afirmăm că aria unei drepte sau a unui segment este nulă.

PROBLEME PROPUSE

1. Oricum am scoate 5 bile dintr-o urnă în care se află bile albe şi negre, printre cele 5 bile se află cel puţin o bilă neagră. Care este numărul maxim de bile albe din urnă?

2. Dintre cei 20 de băieţi ai unei clase, 18 joacă fotbal, 15 handbal, 16 tenis şi 13 volei. Să se arate că cel puţin doi băieţi practică toate cele patru sporturi.

3. Să se arate că, oricum am alege 7 pătrate perfecte, distincte, există cel puţin două a căror diferenţă se divide prin 10.

4. O mulţime este formată din $10^n + 1$ numere naturale. Arătaţi că această mulţime are cel puţin o submulţime cu două elemente astfel încît diferenţa acestora să fie un număr întreg divizibil cu 10^n.

5. Să se arate că, oricum am alege cinci numere întregi, există două dintre acestea care au suma sau diferenţa divizibilă cu 7.

6. Într-o sală se găsesc n oameni ($n \geqslant 2$). Să se demonstreze că printre ei se găsesc doi care au acelaşi număr de cunoscuţi printre cei prezenţi (se presupune că dacă A este cunoscutul lui B, atunci şi B este cunoscut al lui A ; nimeni nu este considerat ca fiind cunoscut al lui însuşi).

7. Se dă un pătrat cu latura de lungime 1. Să se arate că, oricum am alege 5 puncte interioare lui, există cel puţin două astfel încît distanţa dintre ele să fie mai mică decît $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Fie un disc cu raza de lungime 1. Să se arate că dacă acest disc conţine 7 puncte astfel încît distanţa dintre oricare două este cel puţin 1, atunci centrul O al discului este, cu siguranţă, unul dintre cele 7 puncte.

Scanned with OKEN Scanner

9. Să se arate că, oricum am aşeza n^2+1 puncte în interiorul unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1, există cel puţin două astfel încît distanţa dintre ele să nu depăşească $\frac{1}{n}$.

10. În interiorul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c se consideră n^3+1 puncte distincte. Să se arate că există cel puţin două puncte cu proprietatea că distanţa dintre acestea nu este mai mare decît:

$$\frac{1}{n}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

11. Să se arate că, oricare ar fi 10 numere naturale consecutive, între acestea există unul care să fie prim cu oricare din celelalte nouă.

12. Să se demonstreze că din oricare zece numere naturale de cîte două cifre (scrise în baza zece) se pot extrage două grupuri diferite, disjuncte, nevide, astfel ca suma numerelor din fiecare grup să fie aceeaşi.

13. Fie în plan un pătrat cu latura de lungime 50. O linie frîntă L este situată în pătrat astfel încît distanţa de la fiecare punct din interiorul pătratului la punctul cel mai apropiat al liniei L este inferioară lui 1. Să se demonstreze că lungimea lui L este superioară lui 1248.

SOLUŢII

1. Presupunem că în urnă sînt cel puţin cinci bile. Atunci este posibil ca la o extragere să scoatem cinci bile albe.

Dacă în urnă sînt patru bile albe, chiar în cazul cel mai nefavorabil cînd primele patru bile sînt albe, a cincea va fi, cu siguranţă, neagră, deci numărul maxim de bile albe este patru.

2. Presupunem că oricare băiat practică cel mult trei sporturi. Atunci numărul maxim de practicanţi ai celor patru sporturi ar fi $20 \cdot 3 = 60$. Dar numărul lor este $18+15+16+13 = 62$ deci, cu siguranţă, cel puţin 2 elevi practică toate cele patru sporturi.

3. Considerăm următorul tabel în care scriem ultima cifră (restul împărţirii la 10) a numerelor n, respectiv n^2:

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

Deci restul împărţirii unui pătrat perfect la 10 este element al mulţimii $A=\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Mulţimea A are 6 elemente şi noi avem 7 pătrate, deci două au aceeaşi ultimă cifră. Diferenţa lor se termină în cifra 0, deci este multiplu de 10.

4. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{10^n}, a_{10^n+1}$ numerele din enunţ. Fiind în număr de 10^n+1, vor da la împărţirea cu 10^n, chiar 10^n+1 resturi. Cum la împărţirea cu 10^n putem obţine numai 10^n resturi distincte rezultă, cu siguranţă, că cel puţin două din cele 10^n+1 numere dau acelaşi rest la împărţirea cu 10^n. Fie ele a_i şi a_j. Atunci, evident, $a_i - a_j$ este divizibil cu 10^n.

5. Fie a, b, c, d, e cinci numere întregi luate la întîmplare. Conform problemei comentate nr. 10, pătratul oricărui număr natural este de forma $7q+k$, unde $k \in \{0, 1, 2, 4\}$. Cum avem cinci numere, iar k ia numai 4 valori, printre pătratele lor există, cu siguranţă, cel puţin două care dau acelaşi rest la împărţirea cu 7, adică există $x, y \in \{a, b, c, d, e\}$ astfel încît $x^2 - y^2$ se divide cu 7.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că 7 divide produsul $(x-y)(x+y)$. Cum 7 este prim, acesta divide, cu siguranță, fie pe $x-y$, fie pe $x+y$ ceea ce trebuia demonstrat.

6. Se observă că numărul maxim de cunoscuți ai unei persoane este $(n-1)$. Presupunem că nu există două persoane care au același număr de cunoscuți. Atunci :

$$p_1 = 0$$
$$p_2 = 1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n = n-1$$

(prin p_i am notat numărul de cunoscuți ai persoanei a i — a).

Acesta este unicul mod posibil prin care cele n persoane se pot cunoaște, parțial, între ele astfel încît să nu existe două persoane care să aibă același număr de cunoscuți.

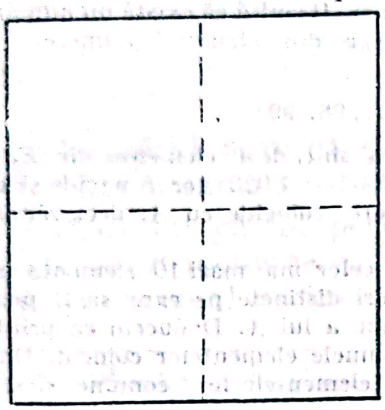


Fig. 1

Dar p_n are $(n-1)$ cunoscuți, deci se cunoaște cu oricare din celelalte $(n-1)$ persoane, în particular și cu p_1, prin urmare p_1 are cel puțin un cunoscut. Rezultă că presupunerea făcută este falsă și deci există două persoane care să aibă același număr de cunoscuți.

7. Împărțim pătratul ca în figura alăturată.

Vor exista cel puțin două puncte situate într-un pătrat mic obținut prin împărțirea pătratului. Distanța dintre acestea va fi cel mult egală cu lungimea diagonalei pătratului mic, care este $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Maximul se realizează cînd 4 puncte interioare coincid cu vîrfurile pătratului, iar al cincilea este centrul său. Atunci distanța dintre oricare două puncte va fi cel puțin $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

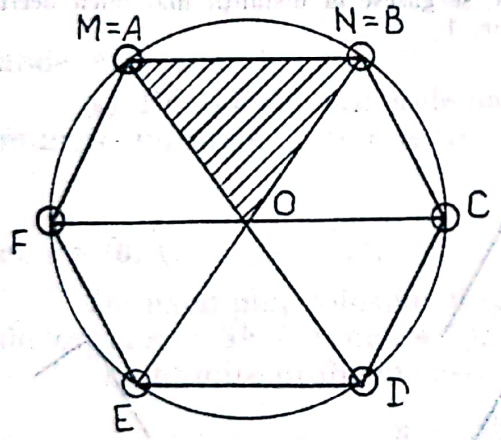
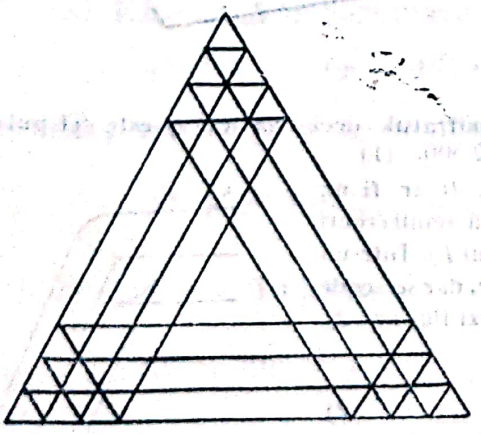


Fig. 2

8. Împărțim discul ca în figura alăturată.

Va exista cel puțin o regiune în care vom avea cel puțin două dintre cele 7 puncte date. Fie regiunea hașurată în figură și M, N cele două puncte situate în interiorul sau pe frontiera regiunii. Distanța dintre M și N va fi maximă și egală cu 1 cînd $M = A$ și $N = B$, spre exemplu. În caz contrar, distanța dintre M și N va fi mai mică decît 1 sau unul dintre punctele M și N va coincide cu centrul O al discului. În primul caz ar fi infirmată ipoteza, iar în al doilea caz problema ar fi rezolvată. Deci $M = A$ și $N = B$. În mod analog, 4 dintre cele 5 puncte rămase vor coincide cu vîrfurile libere ale hexagonului regulat $ABCDEF$, deci al cincilea punct va fi, cu necesitate, O.



9. Împărțim fiecare latură în n segmente de lungime $\frac{1}{n}$ și apoi împărțim triunghiul ca în figura alăturată.

Vor apare $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ triunghiuri echilaterale, cu laturile de lungime $\frac{1}{n}$. Considerînd n^2+1 puncte în interiorul triunghiului inițial, evident două dintre acestea se vor afla în interiorul unui triunghi cu latura de lungime $\frac{1}{n}$ și distanța dintre acestea va fi cel mult $\frac{1}{n}$.

Am folosit faptul că suma primelor n numere naturale impare este egală cu n^2.

10. Împărțim fiecare muchie în n segmente congruente și descompunem astfel paralelipipedul în n^3 paralelipipede cu dimensiunile $\frac{a}{n}, \frac{b}{n}, \frac{c}{n}$.

Cel puțin două din cele $n^3 + 1$ puncte vor fi într-un astfel de paralelipiped. Distanța cea mai mare dintre cele două puncte se obține cînd cele două puncte sînt extremitățile unei diagonale. Deci, distanța dintre cele două puncte nu depășește $\frac{1}{n}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

11. Din cele 10 numere naturale consecutive considerate, cel mult 4 vor fi divizibile cu 3 (două pare, celelalte două impare), cel mult două vor fi divizibile cu 5 (unul par, altul impar), cel mult două divizibile cu 7 (unul par și celălalt impar). Rezultă că există un număr impar nedivizibil cu 3, 5 sau 7 și deci acesta va fi prim cu oricare din celelalte 9 numere.

12. Se dă, deci, mulțimea:

$$E = \{10, 11, 12, \ldots, 49, 50, \ldots, 98, 99\}$$

și fie submulțimea ei $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}\}$, unde a_k sînt, deci, elemente din E.

Mulțimea A are 2^{10} submulțimi. Dintre ele, $2^{10} - 1 = 1\,023$ vor fi nevide și cum nu luăm mulțimea vidă, nu vom lua nici submulțimea care coincide cu A, deci rămîn 1 022 submulțimi.

Nici un element nu este mai mare decît 99. Suma celor mai mari 10 elemente este mai mică decît 990, adică nu există mai mult de 990 valori distincte pe care să le poată lua numărul egal cu suma elementelor din fiecare submulțime a lui A. Deducem că printre cele 1022 submulțimi există cel puțin două pentru care sumele elementelor coincid. Dacă cele două submulțimi astfel găsite nu sînt disjuncte, se scot elementele lor comune și se obțin două submulțimi cu proprietățile cerute în enunț.

13. Locul geometric al punctelor din plan care se găsesc la distanță mai mică decît 1 de L este banda rotunjită de lățime 2 (ca în figura nr. 1).

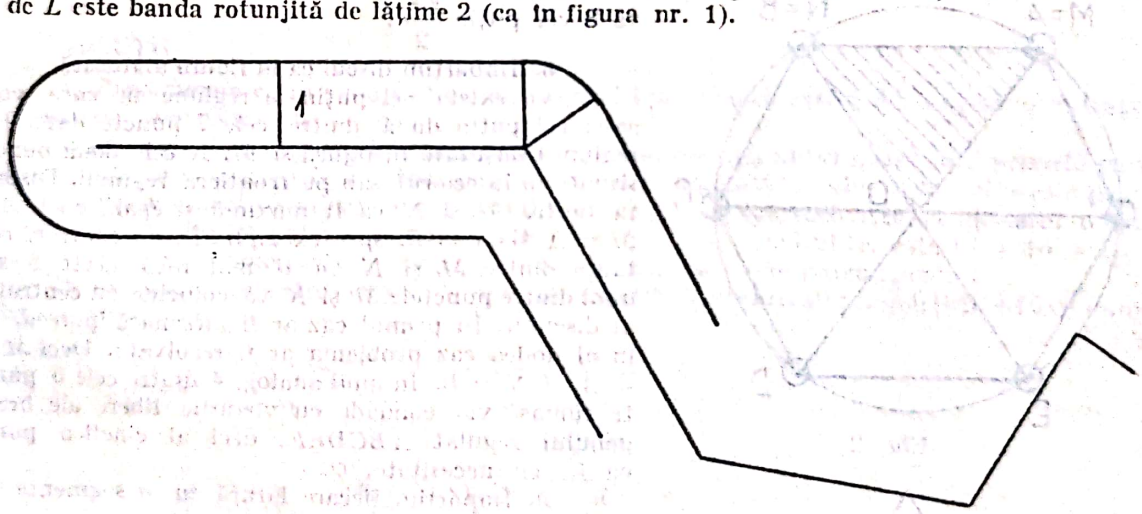


Fig. 1

Din enunțul problemei deducem că B acoperă pătratul, deci aria lui B este cel puțin egală cu aria pătratului care este $50^2 = 2\,500$, $\mathcal{S}_B \geqslant 2\,500$. (1)

Să apreciem aria lui B. Dacă L ar fi dreaptă, B ar fi un dreptunghi de dimensiuni l și 2 la care se adaugă două semicercuri cu razele de lungime 1 la extremități (l este lungimea lui L). Într-un punct în care L se „strîmbă" se adaugă un sector de cerc, dar se scade un patrulater cu arie mai mare decît a sectorului (vezi fig. nr. 2).

Rezultă că:

$$\mathcal{S}_B \leqslant 2l + \pi < 2l + 4. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) obținem $2\,500 < 2l + 4$ deci $l > 1248$.

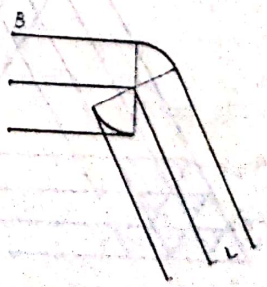


Fig. 2

PĂTRATE PERFECTE

1) Numărul natural n este pătrat perfect dacă există un număr natural a astfel încît $n = a^2$.

2) Dacă un pătrat perfect n conţine un factor prim p atunci, cu necesitate, acest factor se va găsi în descompunerea lui n la o putere pară.

3) În sistemul zecimal avem egalitatea :

$$\overline{a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + a_{m-2} \cdot 10^{m-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

unde $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

4) Fiind date numerele naturale a şi b, $b \neq 0$, există, în mod unic, două numere naturale q şi r astfel încît :

$$a = bq + r,$$

cu $r \in \{0, 1, \ldots, b - 1\}$.

De exemplu, folosind împărţirea cu 3, orice număr natural n va fi de forma $n = 3k + r$, cu $r \in \{0, 1, 2\}$.

În anumite probleme este util să folosim următoarea formă :

$$n = 3k \pm r, \qquad r \in \{0, 1\}.$$

5) Este utilă în rezolvarea problemelor următoarea identitate :

$$x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1)$$

de unde, pentru $x \neq 1$, obţinem :

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Pentru $x = 10$ avem :

$$10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10^2 + 10 + 1 = \frac{10^{n+1} - 1}{9}.$$

6) Să reţinem că ultima cifră a unui pătrat perfect nu poate fi decît una dintre cifrele 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Scanned with OKEN Scanner

1. Să se determine toate numerele naturale nenule n pentru care:

$$1! + 2! + 3! + \ldots + n!$$

este pătrat perfect.

Soluție. Reamintim că prin notația $k!$ înțelegem produsul numerelor de la 1 la k, deci:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k.$$

Pentru $n = 1$ avem $1! = 1$, deci $n = 1$ convine. Pentru $n = 2$ avem $1! + 2! = 1 + 1 \cdot 2 = 3$ care nu este pătrat perfect. Pentru $n = 3$ avem $1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$, deci a doua soluție este $n = 3$.

Vom arăta că pentru $n \geqslant 4$ nu mai avem soluții. Să observăm că $1! + 2! + 3! + 4! = 33$, iar $5! + 6! + \ldots + n!$ este un număr care se termină în cifra 0 pentru că fiecare termen se termină în 0. Rezultă de aici că, pentru $n \geqslant 4$, numărul $1! + 2! + \ldots + n!$ se termină în cifra 3. Dar pătratul nici unui număr natural nu se termină în cifra 3. Deci singurele valori ale lui n pentru care suma $1! + 2! + \ldots + n!$ este pătrat perfect sînt 1 și 3.

Comentariu. Justificați afirmația: „Pentru orice $K \geqslant 5$, $K!$ se termină în cifra 0".

2. Demonstrați că există oricîte numere naturale în baza 10 ale căror pătrate se termină în 321.

Soluție. Orice număr care se termină în cifra 1 are proprietatea că pătratul său se termină tot în 1.

Pătratul oricărui număr ce se termină în 11 se termină în 21. Fie un număr ale cărui ultime 3 cifre sînt 1. Pătratul său se termină în 321 (verificați).

Există oricîte numere care se termină în 111. Ele sînt de forma $n \cdot 1\,000 + 111$, unde $n \in \mathbb{N}$, deci există oricîte numere ale căror pătrate se termină în 321.

Comentariu. Rezultatul se poate extinde. Demonstrați că există oricîte numere (o infinitate) naturale în baza 10 al căror pătrat se termină în:

$$\overline{k(k-1)(k-2)\ldots 321}$$

unde k este o cifră diferită de 0.

3. Suma cifrelor unui număr natural este 1 985. Poate fi acest număr pătrat perfect?

Soluție. Orice număr natural are una dintre formele $3p$, $3p + 1$, $3p + 2$. Pătratul său va fi de forma $3k$ sau $3k + 1$. Rezultă că nu există pătrate perfecte de forma $3k + 2$.

Restul împărțirii unui număr natural prin 3 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor sale la 3.

În cazul nostru, $1\,985 = 3 \cdot 661 + 2$, deci 1 985 este de forma $3k + 2$. Rezultă că nu există pătrate perfecte cu suma cifrelor egală cu 1 985.

Comentarii. 1). Dacă suma cifrelor este de forma $3k$ sau $3k+1$ nu rezultă cu necesitate că numărul este pătrat perfect. Numerele 111 111 și 1 111 111 au suma cifrelor $6 = 3 \cdot 2$, respectiv $7 = 3 \cdot 2 + 1$, dar nu sînt pătrate perfecte.

2). Dați exemple de pătrate perfecte de trei cifre cu suma cifrelor 9.

4. Care numere naturale au un număr impar de divizori naturali distincți?

Soluție. Fie n, $a \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $a \mid n$. Rezultă că există $b \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $n = a \cdot b$, deci și b este divizor al lui n. Dacă $\sqrt{n}$ nu este număr natural, atunci a și b sînt distincți. Să demonstrăm că, dacă $a < \sqrt{n}$, atunci $b > \sqrt{n}$. Într-adevăr, din faptul că $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ rezultă $b \neq \sqrt{n}$ și deci $b > \sqrt{n}$ sau $b < \sqrt{n}$. Să presupunem că $b < \sqrt{n}$. Cum $a < \sqrt{n}$ rezultă $a \cdot b < \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, în contradicție cu ipoteza $a \cdot b = n$.

Din cele de mai sus rezultă că, dacă n nu este pătrat perfect, pentru orice divizor natural a al lui n, mai există încă unul b, distinct de a. Deci orice număr natural care nu este pătrat perfect are un număr par de divizori naturali distincți.

Dacă $\sqrt{n} = k$ rezultă $n = k^2$ și deci $k \mid n$ și în acest caz numărul divizorilor distincți este impar. Ei sînt, în ordine:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p, k, b_p, b_{p-1}, \ldots, b_2, b_1,$$

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, dacă $n = 36$, divizorii săi naturali sînt în număr de 9 :

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.$$

În concluzie, singurele numere naturale care au un număr impar de divizori naturali distincți sînt pătratele perfecte.

Comentarii. 1). Rezultatul are numeroase aplicații în probleme date la concursuri.

2). O altă demonstrație este următoarea :

Orice număr natural n se poate scrie în mod unic sub forma $n = p_{i_1}^{\alpha_1} \cdot p_{i_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}^{\alpha_n}$, numită *descompunerea canonică* a numărului n în factori primi, unde $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_n}$ sînt numere prime, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ numere naturale, nenule.

Numărul divizorilor unui număr natural n este dat de formula :

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1).$$

Dacă n este pătrat perfect, atunci exponenții $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt, cu necesitate, numere pare, iar factorii $\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_p + 1$ vor fi numere impare, deci produsul $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$ va fi impar.

Dacă n nu este pătrat perfect atunci cel puțin unul dintre exponenții α_k este impar și deci $\alpha_k + 1$ este par, de unde rezultă că produsul $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$ este par.

5. Determinați toate numerele de două cifre scrise în sistemul zecimal, care adunate cu răsturnatele lor dau pătrate perfecte.

Soluție. Dacă $\overline{ab}$ este un număr de două cifre atunci prin răsturnatul său înțelegem numărul $\overline{ba}$. Trebuie să avem :

$$\overline{ab} + \overline{ba} = k^2,$$

adică, succesiv :

$$10a + b + 10b + a = k^2,$$

$$11a + 11b = k^2;$$

$$11(a + b) = k^2.$$

Cu necesitate trebuie, pentru ca egalitatea să existe, ca $a + b$ să fie multiplu de 11. Dar a și b fiind cifre rezultă $a + b \leqslant 18$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), deci $a + b = 11$. Rezultă că numerele căutate sînt :

$$29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.$$

Comentarii. 1). Observăm că suma $\overline{ab} + \overline{ba}$ este egală cu 121, indiferent de numărul ales.

2). De ce numerele găsite cresc din 9 în 9?

3). Găsiți numerele $\overline{ab}$ cu proprietatea $|\overline{ab} - \overline{ba}| = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Un număr natural cu mai mult de două cifre se termină în 5. Decideți dacă antepenultima cifră a pătratului său este pară sau impară.

Soluție. Fie $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}\,5}$. El se mai poate scrie $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} \cdot 10 + 5$ sau, încă, $n = p \cdot 10 + 5$, $p \in \mathbb{N}^*$. Calculăm $n^2 = 100p^2 + 100p + 25 = 100p(p + 1) + 25$. Deci $n^2 - 25 = 100\,p(p + 1)$.

Cum $p(p + 1)$ este multiplu de 2, rezultă că $n^2 - 25$ se divide cu 200, deci antepenultima cifră este, cu necesitate, pară.

Comentariu. Determinați antepenultima cifră a pătratului unui număr natural care se termină în 55.

7. Demonstrați că pătratul oricărui număr impar este de forma $8k + 1$.

Soluție. Fie $n = 2p + 1$. Rezultă $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4p(p + 1) + 1$.

Dar $p(p + 1)$ reprezintă produsul a două numere consecutive și este întotdeauna un număr par. Notînd $p(p + 1) = 2k$ obținem $n^2 = 8k + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Comentariu. Dacă n este par rezultă că pătratul său este de forma $4k$. Deci pătratul oricărui număr natural poate fi de forma $4k$ sau $8k+1$. Reciproca nu este adevărată, adică dacă un număr natural este de forma $4k$ sau $8k+1$ nu rezultă întotdeauna că el este pătrat perfect. Pentru a justifica cele spuse mai sus observăm că pentru $k=5$ numerele $4k=20$ și $8k+1=41$ nu sînt pătrate perfecte. Rezultă că aceste forme sînt necesare pentru ca un număr să fie pătrat perfect, dar nu sînt suficiente.

8. Există numere formate din mai multe cifre nenule, toate egale, care să fie pătrate perfecte?

Soluție. Conform problemei rezolvate anterior, pătratele perfecte se găsesc printre numerele de forma $4k$ sau $4k+1$.

Să demonstrăm că restul împărțirii unui număr natural la 4 este același cu restul împărțirii numărului format din ultimele sale două cifre la 4.

Fie $M=\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}a_{n-1}a_n}$, unde a_k sînt cifre, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ și $a_1\neq 0$.

Atunci $M=\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}}\cdot 100+\overline{a_{n-1}a_n}$. Dar $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}}\cdot 100$ este multiplu de 4 și rezultă că restul este dat de restul împărțirii la 4 a numărului $\overline{a_{n-1}a_n}$.

Să analizăm cazurile posibile:

(1) Dacă $M=\overline{11\ldots11}$, rezultă $M=4k+3$, deci M nu poate fi pătrat perfect.

(2) și (3) Dacă $M=11\ldots11$ nu e pătrat perfect, nici $\overline{44\ldots44}$ și nici $\overline{99\ldots99}$ nu sînt pătrate perfecte.

(4) Dacă $M=\overline{22\ldots22}$, rezultă $M=4k+2$.

(5) Dacă $M=\overline{55\ldots55}$, rezultă $M=4k+3$.

(6) Dacă $M=\overline{66\ldots66}$, rezultă $M=4k+2$.

Dar nici în aceste cazuri M nu poate fi pătrat perfect. Rămîn de analizat cazurile:

(7), (8) și (9) $M=\overline{33\ldots33}$, $M=\overline{77\ldots77}$ și $M=\overline{88\ldots88}$.

Nici un pătrat perfect nu se termină în 3, 7 sau 8, deci, cu aceasta, toate cazurile posibile au fost analizate.

Răspunsul la problemă este: Nu există pătrate perfecte formate din mai multe cifre nenule, toate egale.

Comentariu. În problema comentată nr. 7 am arătat că pătratul oricărui număr natural este de forma $4k$ sau $8k+1$, iar în această problemă am admis că el este de forma $4k$ sau $4k+1$. Este o contradicție? Nu, deoarece condiția ca numărul să fie de forma $8k+1$ era o condiție numai necesară. Evident că $8k+1=4\cdot 2k+1=4p+1$ și deci am înlocuit condiția necesară ca un număr să fie pătrat perfect prin alta, mai „slabă".

9. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul natural nenul n, n^2+n nu poate fi pătrat perfect.

Soluție. Vom arăta că n^2+n este cuprins între două pătrate perfecte consecutive și, cum între două pătrate consecutive nu mai poate exista un al treilea, va rezulta că n^2+n nu este pătrat perfect.

Într-adevăr, n^2+n este mai mare decît n^2 și mai mic decît n^2+2n+1 adică:

$$n^2<n^2+n<n^2+2n+1.$$

Cum $n^2+2n+1=(n+1)^2$ rezultă $n^2<n^2+n<(n+1)^2$ și deci n^2+n nu este pătrat perfect pentru nici un număr n natural nenul.

Comentarii. 1). Dacă $n=0$ atunci concluzia nu mai este adevărată, $0+0=0$ și 0 este pătrat perfect.

2). Cum $n^2+n=n(n+1)$, am demonstrat, de fapt, că produsul a două numere naturale consecutive nenule nu poate fi pătrat perfect.

3). Din demonstrația precedentă rezultă că numărul $\sqrt{n^2+n}$ este întotdeauna un număr irațional, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

4). La fel se poate demonstra că și numărul n^2+n+1, cu $n\neq 0$, nu poate fi pătrat perfect.

Scanned with OKEN Scanner

10. Să se demonstreze că produsul a 4 numere naturale consecutive nu poate fi pătrat perfect, dacă primul număr este nenul.

Soluție. Avem :

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = [n(n+3)]\,[(n+1)(n+2)] = (n^2+3n)(n^2+3n+2) =$$
$$= (n^2+3n+1-1)(n^2+3n+1+1) = (n^2+3n+1)^2 - 1 < (n^2+3n+1)^2.$$

Pe de altă parte :

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)(n^2+3n+2) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) > (n^2+3n)^2.$$

Deci :

$$(n^2+3n)^2 < n(n+1)(n+2)(n+3) < (n^2+3n+1)^2.$$

Cum $(n^2+3n)^2$ și $(n^2+3n+1)^2$ sînt pătrate perfecte consecutive, conform problemei precedente $n(n+1)(n+2)(n+3)$ nu poate fi pătrat perfect.

Comentarii. 1). Să demonstrăm că produsul a două numere naturale consecutive nenule nu poate fi egal cu produsul altor 4 numere naturale consecutive nenule.

Dacă ar exista o astfel de egalitate ar rezulta că există n și m numere naturale nenule astfel încît $n(n+1) = m(m+1)(m+2)(m+3)$ adică $n^2+n = (m^2+3m+1)^2 - 1$, deci :

$$n^2 + n + 1 = (m^2+3m+1)^2.$$

Dar n^2+n+1 nu poate fi pătrat perfect pentru $n \neq 0$ (v. problema precedentă) și deci egalitatea este imposibilă.

2). Demonstrați că produsul a trei numere naturale consecutive nu poate fi cub perfect.

3). Demonstrați că produsul a trei numere naturale consecutive nenule nu poate fi pătrat perfect. Se mai poate aplica metoda precedentă?

4). Rezultatele obținute se pot extinde la mulțimea numerelor întregi.

11. a) Arătați că $100!$ nu poate fi pătrat perfect.

b) Arătați că :

$$s = 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5\cdot 6 + 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 + 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15 + \ldots$$

nu poate fi pătrat perfect.

Soluție. a) Avem $100! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots 96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100$.

Acest produs conține ca factor numărul prim 97 care apare o singură dată în descompunerea în factori primi a lui $100!$, deci $100!$ nu poate fi pătrat perfect.

Comentarii. 1). Întotdeauna, dacă n este pătrat perfect și dacă p este un număr prim ce divide pe n, atunci și p^2 divide pe n.

2). Rezultatul poate fi extins pentru $n!$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

b) Să observăm că, începînd cu al treilea termen, toți termenii se termină în cifra 0. Rezultă că suma se termină în cifra 7, deci nu este pătrat perfect.

Comentariu. Este util să remarcăm diversitatea metodelor prin care putem arăta că un număr nu este pătrat perfect.

12. Determinați numerele întregi k astfel încît $n = k^4 + 17k^2 + 60$ să fie pătrat perfect.

Soluție. Vom determina întîi valorile lui k pentru care numărul dat nu poate fi pătrat perfect. Pentru aceasta îl vom încadra pe n între două pătrate consecutive. Evident, $n < (k^2+9)^2 = k^4 + 18k^2 + 81$. Rămîne să determinăm valorile lui k pentru care $n > (k^2+8)^2$, adică $k^4 + 17k^2 + 60 > k^4 + 16k^2 + 64$, deci $k^2 > 4$. Am arătat că, pentru $k^2 > 4$, n nu este pătrat perfect. Rămîn de analizat cazurile $k^2 = 0$, $k^2 = 1$, $k^2 = 4$.

Verificînd, se deduce că numai pentru $k^2 = 4$, n este pătrat perfect și anume : pentru $k = -2$ și $k = 2$, $n = 144 = 12^2$.

Comentarii. 1). Esențială a fost observația că $n < (k^2+9)^2$.

2). Rezolvați aceeași problemă pentru $n = k^4 + 33k^2 + 240$.

13. Se dau trei numere întregi pătrate perfecte. Dacă suma acestor trei numere se divide cu 9, atunci dintre acestea se pot alege două a căror diferență se divide cu 9.

Soluție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Atunci n este de forma $n = 9k + r$, unde $r \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ și $n^2 = 81k^2 + 18kr + r^2 = 9(9k^2 + 2kr) + r^2 = 9p + r^2$, unde $r^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$. Deci $n^2 = 9q + r'$, $r' \in \{0, 1, 4, 7\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie a^2, b^2, c^2 cele trei pătrate. Pentru ca suma lor să fie multiplu de 9 nu putem avea decît una din următoarele trei situații:

1) Toate de forma $9q$.

2) Două de forma $9q + 1$ și unul de forma $9q + 7$.

3) Două de forma $9q + 4$ și unul de forma $9q + 1$.

Se observă că în fiecare caz posibil există două numere care dau același rest la împărțirea cu 9 și deci diferența lor se divide cu 9.

Comentariu. Aici a fost mai comod să luăm resturile de forma $\pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

14. Fie A, B, C trei numere naturale care se pot scrie fiecare ca o sumă de două pătrate de numere întregi. Să se arate că:

a) Produsul AB se poate scrie ca o sumă de două pătrate de numere întregi;

b) Produsul ABC se poate scrie, de asemenea, ca o sumă de două pătrate de numere întregi.

Soluție. a) Conform ipotezei, există a, b, c, d astfel încît $A = a^2 + b^2$, $B = c^2 + d^2$. Atunci:

$$A \cdot B = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Deci:

$$A \cdot B = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \qquad (*)$$

b) Notînd $ac + bd = m$ și $ad - bc = n$, avem $AB = m^2 + n^2$, iar $C = p^2 + q^2$.

Pentru a obține $ABC = (AB) \cdot C$, este suficient să înlocuim în (*) a cu m, b cu n, c cu p și d cu q. Avem:

$$ABC = (mp + nq)^2 + (mq - np)^2.$$

Comentariu. Trecerea de la a) la b) sugerează următoarea generalizare:

Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt numere naturale care se pot scrie fiecare ca o sumă de două pătrate de numere întregi atunci și produsul $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ se poate scrie ca o sumă de două pătrate de numere întregi.

15. Demonstrați că dacă numărul natural $2k$ este suma a două pătrate perfecte atunci și numărul k este suma a două pătrate perfecte, $k \in \mathbb{N}$.

Soluție. Conform ipotezei, există două numere naturale a și b astfel încît:

$$2k = a^2 + b^2, \quad (a > b).$$

Va trebui să demonstrăm că există două numere naturale x și y astfel încît $a^2 + b^2 = 2(x^2 + y^2)$ sau $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Vom construi, efectiv, aceste numere. Avem:

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{a^2}{4} + 4 \cdot \frac{b^2}{4}\right) = \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) + 2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}\right) + 2\left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[2 \cdot \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a - b}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2.$$

Deci, putem lua, de exemplu, $x = \frac{a + b}{2}$ și $y = \frac{a - b}{2}$.

Rezultă $2k = 2(x^2 + y^2)$, adică:

$$2k = 2\left[\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$k = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Rămîne să dovedim că $\frac{a+b}{2}$ și $\frac{a-b}{2}$ sînt numere naturale. Dar $a^2 + b^2 = 2k$ și rezultă că a și b au aceeași paritate, deci $\frac{a+b}{2}$ și $\frac{a-b}{2}$ sînt naturale. Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Comentarii. 1). Dăm următorul exemplu numeric: fie $k = 50$, $a = 8$, $b = 6$. Avem:

$$2 \cdot 50 = 8^2 + 6^2,$$

$$50 = \left(\frac{8+6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8-6}{2}\right)^2.$$

2). Din enunț nu rezultă că orice număr par poate fi scris sub forma unei sume de două pătrate perfecte. Pentru a dovedi că acest fapt nu este întotdeauna posibil dăm următorul contraexemplu: 6 nu poate fi scris ca o sumă de două pătrate perfecte.

16. Fie numărul $A = \overline{11\ldots1}$ avînd $2n$ cifre și $B = \overline{44\ldots4}$ avînd n cifre scrise amîndouă în sistemul zecimal. Demonstrați că $A + B + 1$ este pătrat perfect.

Soluție. Avem:

$$A + B + 1 = (10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \ldots + 10 + 1) + 4(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) + 1.$$

Fie acum identitatea:

$$x^{k+1} - 1 = (x-1)(x^k + x^{k-1} + \ldots + x + 1)$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$. Pentru $x \neq 1$, aceasta devine:

$$x^k + x^{k-1} + \ldots + x + 1 = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Pentru $x = 10$ obținem:

$$10^k + 10^{k-1} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^{k+1} - 1}{9}.$$

Înlocuind pe k prin $2n - 1$, respectiv prin $n - 1$, obținem:

$$A + B + 1 = \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \frac{10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4}{9} = \left(\frac{10^n + 2}{3}\right)^2.$$

Rămîne să arătăm că $\frac{10^n + 2}{3}$ este număr natural. Într-adevăr:

$$10^n + 2 = \overbrace{100\ldots02}^{\text{de } n-1 \text{ ori}}.$$

Suma cifrelor acestui număr este 3, deci numărul este divizibil cu 3.

Comentariu. [Deși problema nu cere, se poate determina efectiv, efectuînd împărțirea, numărul $\frac{10^n + 2}{3}$. Avem:

$$\frac{10^n + 2}{3} = \overbrace{100\ldots02}^{\text{de } n-1 \text{ ori}} : 3 = \overbrace{33\ldots34}^{\text{de } n-1 \text{ ori}}.$$

17. Să se calculeze $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{88\ldots89}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}}$.

Soluție. Vom demonstra că numărul $K = \underbrace{44\ldots4}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{88\ldots89}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}$ este pătrat perfect. Avem:

$$K = \underbrace{44\ldots4}_{\text{de } n \text{ ori}} \cdot 10^n + \underbrace{88\ldots8}_{\text{de } n-1 \text{ ori}} \cdot 10 + 9 = 4 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n \text{ ori}} \cdot 10^n + 8 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n-1 \text{ ori}} \cdot 10 + 9.$$

Procedînd ca la problema precedentă avem:

$$K = 4(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) \cdot 10^n + 8 \cdot (10^{n-2} + 10^{n-3} + \ldots + 10 + 1) \cdot 10 +$$

$$+ 9 = 4 \cdot \frac{10^n - 1}{9} \cdot 10^n + 8 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{9} \cdot 10 + 9 = \frac{4 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 8 \cdot 10^n - 8 \cdot 10 + 81}{9} =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2.$$

Este ușor de observat că $2 \cdot 10^n + 1$ se divide cu 3, deci K este pătrat perfect:

$$2 \cdot 10^n + 1 = 2\underbrace{00\ldots0}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}1 \quad \text{și} \quad 2\underbrace{00\ldots0}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}1 : 3 = \underbrace{66\ldots6}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}7.$$

Ultimul număr reprezintă radicalul dat.

Comentariu. Repetați raționamentul scriind numărul sub forma:

$$K = 4 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{de } n \text{ ori}}\underbrace{\overline{00\ldots0}}_{\text{de } n \text{ ori}} + 8 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{\text{de } n-1 \text{ ori}} + 1.$$

18. Într-un număr de 100 de cifre, toate cifrele în afară de una singură sînt egale cu 5. Poate fi numărul pătrat perfect?

Soluție. Ultima cifră a numărului poate fi 5 sau cealaltă cifră.

Cazul I. Dacă ultima cifră este 5 atunci, pentru ca numărul să fie pătrat perfect, cu necesitate, penultima cifră trebuie să fie 2, deci $K = \overline{55\ldots525} = \overline{55\ldots5000} + 525 = 8k + 5$.

Dar am văzut că pătratul unui număr impar este de forma $8k + 1$, deci, în acest caz, numărul nu este pătrat perfect.

Cazul II. Dacă ultima cifră nu este 5 avem:

$$K = \overline{55\ldots5a} = \overline{55\ldots500} + \overline{5a}.$$

În mod necesar, dar nu suficient, pentru a fi pătrat perfect, K trebuie să fie de forma $4k$ sau $4k + 1$. Pentru ca numărul K să fie de forma $4k$, trebuie ca $\overline{5a}$ să fie multiplu de 4 de unde $a = 2$ sau $a = 6$. În cazul $a = 2$ nu există pătrate perfecte care se termină în 2. În cazul $a = 6$, $K = \overline{55\ldots56}$ are suma cifrelor 501, deci K este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 9, deci nici în acest caz K nu este pătrat perfect.

A mai rămas de analizat subcazul în care K este de forma $4k + 1$ deci $\overline{5a}$ este de forma $4k + 1$ de unde $a = 3$ sau $a = 7$ și deci nici acum el nu poate fi pătrat perfect.

În concluzie, răspunsul la întrebarea problemei este negativ.

Comentariu. Faptul că numărul a avut 100 de cifre a fost esențial în demonstrație? Arătați că numărul putea avea $3n + 1$ cifre, cu $n \neq 3p + 2$.

PROBLEME PROPUSE

1. Pătratul unui număr natural n, de două cifre, scris în baza 10, este de forma $n = \overline{a(a+b)b}$, unde a, $a + b$, b sînt cifre, iar $a \neq 0$.

a) Arătați că $a = b$ și că a este pătratul unui număr natural.

b) Găsiți toate numerele naturale cu proprietatea din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

2. Determinați cel mai mic pătrat perfect de forma $x \cdot \overline{abcabc}$, unde $x \in \mathbb{N}^*$, iar a, b, c sînt cifre, $a \neq 0$.

3. Demonstrați că dacă un număr natural, scris în baza zece, are 300 de cifre de 1, iar restul cifrelor sînt nule, nu este pătrat perfect.

4. Arătați că restul împărțirii prin 16 a unui pătrat perfect este tot un pătrat perfect.

5. Restul împărțirii unui număr natural prin 9 este unul dintre numerele 2, 3 5, 6, 8. Poate fi acest număr pătrat perfect?

6. Suma pătratelor a trei sau patru sau a cinci numere întregi consecutive nu poate fi pătrat perfect.

7. Găsiți numerele de forma $\overline{aabb}$, cu a și b cifre nenule, care sînt pătrate perfecte.

8. a) Demonstrați că numerele :

$$A = \underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}\ \underbrace{55\ldots56}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad B = \underbrace{11\ldots1}_{\text{de } 2n \text{ ori}} - \underbrace{22\ldots2}_{\text{de } n \text{ ori}}, \quad C = \underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{22\ldots25}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}$$

sînt pătrate perfecte.

b) Determinați sistemele de numerație, diferite de sistemul zecimal, pentru care numărul B este, de asemenea, pătrat perfect.

9. Să se demonstreze că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, numărul $2^n - 1$ nu poate fi pătrat perfect.

10. Să se arate că nu există pătrat perfect avînd ultimele două cifre impare.

11. Să se găsească toate numerele naturale N, scrise în sistemul zecimal, cu proprietatea că, oricum am permuta cifrele lui N, obținem un pătrat perfect.

12. Să se demonstreze că nu există nici o pereche de numere naturale nenule m și n astfel ca expresiile $m^2 + 4n$ și $n^2 + 4m$ să fie simultan pătrate perfecte.

13. Numărul N este pătrat perfect și nu se termină în 0. După tăierea ultimelor două cifre ale acestui număr se obține un nou pătrat perfect. Găsiți cel mai mare număr N cu această proprietate.

14. Să se determine numerele naturale nenule n și k pentru care există egalitatea :

$$|1! - 2! + 3! - 4! + \ldots + (-1)^{n+1} n!| = k^2.$$

SOLUȚII

1. a). Avem :

$$n = \overline{a(a+b)b} = 100 \cdot a + 10 \cdot (a+b) + b =$$
$$= 100a + 10a + 10b + b = 110\,a + 11\,b = 11\,(10a + b).$$

Cu necesitate, pentru că n este pătrat perfect, trebuie ca $10a + b$ să se dividă cu 11. Numărul $10a + b$ fiind de două cifre trebuie, pentru a fi divizibil cu 11, să aibă cifrele egale, deci $a = b$. Numărul n devine $n = 11^2 \cdot a$. Dar n este pătrat perfect, deci a trebuie să fie pătrat perfect.

b) Cifra a poate lua valorile 1, 4, 9, dar $a + b < 10$ și $a = b$, deci $a = 1$ sau $a = 4$. Numerele căutate sînt 121 și 484.

2. Avem :

$$\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1\,000 + \overline{abc} = 1\,001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}.$$

Pentru ca $x \cdot \overline{abcabc}$ să fie un pătrat perfect și să fie minim trebuie ca $\overline{abc}$ să conțină factorii cei mai mari din produsul $7 \cdot 11 \cdot 13$ și deci $\overline{abc} = 11 \cdot 13 = 143$.

Prin urmare, $x \cdot \overline{abcabc} = 7 \cdot x \cdot (143)^2$. Cu necesitate, pentru minim rezultă $x = 7$.

3. Suma cifrelor este 300. Numărul se divide deci cu 3, dar nu se divide cu 9, prin urmare nu poate fi pătrat perfect.

4. La împărțirea unui număr cu 16 se obține unul din resturile 0, 1, 2, ..., 13, 14, 15. Pătratul său va da la împărțirea cu 16 unul din resturile 0, 1, 4, 9.

5. Nu, pentru că dacă $n = 9k \pm r$, unde r este unul din numerele 0, 1, 2, 3, 4 atunci, prin ridicarea la pătrat, se obțin resturile 0, 1, 4, 7, deci nici unul dintre numerele date.

6. Avem :

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2,$$

dar orice pătrat perfect este de forma $3k$ sau $3k + 1$, deci $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2$ nu este pătrat perfect $(\forall) n \in \mathbb{Z}$. De asemenea :

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 +$$
$$+ 4n + 4 = 4n^2 + 4n + 6 = 4(n^2 + n + 1) + 2,$$

dar nici un pătrat perfect nu este de forma $4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

Încă: $(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=n^2-4n+4+n^2-2n+1+$
$+n^2+n^2+2n+1+n^2+4n+4=5n^2+10=5(n^2+2)$.

Dar n^2 nu se termină nici în 3, nici în 8 deci n^2+2 nu se termină nici în 5, nici în 0 și, prin urmare, n^2+2 nu este multiplu de 5. Numărul $5(n^2+2)$ este multiplu de 5, dar nu multiplu de 25, deci nu este pătrat perfect.

7. Fie $N=\overline{aabb}=1\,000a+100a+10b+b=11(100a+b)$. Din faptul că N este pătrat perfect rezultă că $100a+b$ va fi multiplu de 11. Fiindcă $99a$ este multiplu de 11 atunci și $(100a+b)-99a=a+b$ va fi multiplu de 11. Cum a și b sînt cifre nenule rezultă $a+b=11$ (*). Numărul N devine:

$N=11(100a+b)=11(99a+a+b)=11(99a+11)=11^2(9a+1)$

și, deoarece N este pătrat perfect, rezultă că $9a+1$ este pătrat perfect, unde $a\in\{2,3,\ldots,9\}$. Dînd lui a valori din mulțimea $\{2,3,\ldots,9\}$ doar pentru $a=7$ obținem că $9a+1$ este pătrat perfect. Ținînd cont de (*) rezultă $b=4$, deci singurul număr pătrat perfect de forma $\overline{aabb}$ este 7 744.

8. a) Avem:

$$A=\underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}\underbrace{55\ldots5}_{\text{de } n \text{ ori}}6=\underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}+\underbrace{55\ldots5}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}+1=(10^n+$$

$$+10^{n-1}+\ldots+10+1)\cdot10^{n+1}+5(10^n+10^{n-1}+\ldots+10+1)+1=\frac{10^{n+1}-1}{10-1}\cdot10^{n+1}+$$

$$+5\cdot\frac{10^{n+1}-1}{10-1}+1=\frac{10^{2(n+1)}-10^{n+1}+5\cdot10^{n+1}-5+9}{9}=\frac{10^{2(n+1)}+4\cdot10^{n+1}+4}{9}=$$

$$=\left[\frac{10^{n+1}+2}{3}\right]^2.$$

Rămîne să arătăm că $\frac{10^{n+1}+2}{3}$ este natural, ceea ce este echivalent cu faptul că $10^{n+1}+2$ este multiplu de 3. Dar $10^{n+1}+2=1\underbrace{00\ldots0}_{\text{de } n \text{ ori}}2$ și suma cifrelor sale este 3, deci numărul $10^{n+1}+2$ este multiplu de 3.

De asemenea:

$$B=\underbrace{11\ldots1}_{\text{de } 2n \text{ ori}}-\underbrace{22\ldots2}_{\text{de } n \text{ ori}}=(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10+1)-2(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+$$

$$+10+1)=\frac{10^{2n}-1}{10-1}-2\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{10^{2n}-2\cdot10^n+1}{9}=\frac{(10^n-1)^2}{9}=$$

$$=\frac{(10-1)^2(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)^2}{9}=[3(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+10+1)]^2$$

și:

$$C=\underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n \text{ ori}}\underbrace{22\ldots2}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}5=\underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n \text{ ori}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{de } n+2 \text{ ori}}+\underbrace{22\ldots2}_{\text{de } n+1 \text{ ori}}0+5=(10^{n-1}+10^{n-2}+\ldots+$$

$$+10+1)\cdot10^{n+2}+2(10^n+10^{n-1}+\ldots+10+1)\cdot10+5=\frac{10^n-1}{10-1}\cdot10^{n+2}+20\cdot\frac{10^{n+1}-1}{10-1}+$$

$$+5=\frac{10^{2n+2}-10^{n+2}+2\cdot10^{n+2}-20}{9}+5=\frac{10^{2(n+1)}+10\cdot10^{n+1}+25}{9}=\left[\frac{10^{n+1}+5}{3}\right]^2.$$

Numărul $10^{n+1}+5=100\underbrace{\ldots0}_{\text{de } n \text{ ori}}5$ are suma cifrelor egală cu 6, deci este divizibil cu 3. Rezultă că $\frac{10^{n+1}+5}{3}$ este natural și deci și C este pătrat perfect.

b) Scriem numărul B în baza a:

$$B=\underbrace{11\ldots1}_{\text{de } 2n \text{ ori}}{}_{(a)}-\underbrace{22\ldots2}_{\text{de } n \text{ ori}}{}_{(a)}=(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\ldots+a^2+a+1)-2(a^{n-1}+\ldots+a^2+a+1)=$$

$$=\frac{a^{2n}-1}{a-1}-2\cdot\frac{a^n-1}{a-1}=\frac{a^{2n}-2a^n+1}{a-1}=\frac{(a^n-1)^2}{a-1}=\frac{(a-1)^2(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)^2}{a-1}=$$

$$=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ca B să fie pătrat perfect trebuie, cu necesitate, ca $a-1$ să fie pătrat perfect. Deci $a = m^2 + 1$, unde $m \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

9. Pentru $n = 2$, $2^2 - 1 = 3$ nu este pătrat perfect. Pentru $n > 3$ avem:

$$2^n - 1 = (2-1)(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1) = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 = 2^2(2^{n-3} + \ldots + 2 + 1) + 2 + 1 = 4(2^{n-3} + \ldots + 2 + 1) + 3 = 4k + 3.$$

Dar nu există pătrate perfecte de forma $4k + 3$.

10. Scriem pe n sub forma $n = m \cdot 10^2 + \overline{ab}$. Atunci n^2 va fi de forma $n^2 = m_1 \cdot 10^2 + \overline{ab^2}$. Ultimele două cifre ale lui n^2 vor fi, deci, ultimele două cifre ale lui $\overline{ab}^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$. Dacă $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, ultima cifră este impară, iar penultima are paritatea lui $20ab + p$, $p \in \{0, 2, 4, 8\}$ și p reprezintă cifra zecilor lui b^2. Rezultă că $20ab + p$ este par, deci penultima cifră este pară.

11. Vom arăta că numai numerele 1, 4, 9 au proprietatea cerută. Un mod de justificare este următorul:

1). Arătăm că nu există numere cu mai mult de 3 cifre care să îndeplinească proprietatea cerută.

Am văzut că nu există pătrate perfecte cu toate cifrele egale și vom presupune că există cel puțin două cifre distincte. Fie ele ultimele două cifre ale numărului. Atunci $N_1 = m \cdot 100 + \overline{ab} = n^2$ și $N_2 = m \cdot 100 + \overline{ba} = (n + k)^2$, unde $a \neq 0$, $a < b$ și $k \geqslant 1$.

Dar $N_2 - N_1 = 9(b - a) = k(2n + k)$, și cum $b - a \leqslant 8$ rezultă $k(2n + k) \leqslant 72$. Din $2n + 1 \leqslant k(2n + k) \leqslant 72$ rezultă $n \leqslant 30$, adică $n^2 \leqslant 900$.

2). Analizăm pătratele perfecte formate din 3 cifre, cifre din mulțimea $\{1, 4, 6\}$ pentru că numerele care conțin cel puțin o cifră din mulțimea $\{0, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ se exclud.

Dar numerele 146, 114, 116, 414, 446, 661, 664 nu sînt pătrate perfecte. Deci nu există numere de 3 cifre, cu proprietatea cerută.

3). Analog demonstrăm că nu există numere de două cifre cu aceeași proprietate. Rămîn numerele 1, 4, 9 ca singurele ce satisfac enunțul.

12. Presupunem, prin absurd, că există numere naturale m și n care au proprietatea că $m^2 + 4n$ și $n^2 + 4m$ sînt simultan pătrate perfecte. Expresiile sînt simetrice în m și n deci putem fixa o ordine între acestea. Fie $m \leqslant n$.

Avem $n^2 + 4m > n^2$ și $n^2 + 4m \leqslant n^2 + 4n < (n + 2)^2$. Rezultă, în mod necesar, $n^2 < n^2 + 4m < (n + 2)^2$ și, deoarece $n^2 + 4m$ este pătrat perfect, atunci $n^2 + 4m = (n+1)^2$, adică $4m = 2n + 1$, ceea ce este absurd.

13. Fie $N_1 = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = n_1^2$ și:

$$N_2 = a_m \cdot 10^{m-2} + a_{m-1} \cdot 10^{m-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2 = n_2^2.$$

Avem $N_1 - 10^2 N_2 = a_1 \cdot 10 + a_0 = n_1^2 - 100\, n_2^2 = (n_1 - 10\, n_2)(n_1 + 10\, n_2)$. Dar a_0 și a_1 sînt cifre și rezultă $10\, a_1 + a_0 \leqslant 99$. De asemenea, din pozitivitate și $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ avem $n_1 - 10n_2 \geqslant 1$, deci $n_1 \geqslant 10n_2 + 1$ adică $n_1 + 10\, n_2 \geqslant 20n_2 + 1$.

Cum:

$$20n_2 + 1 \leqslant (n_1 - 10n_2)(20n_2 + 1) \leqslant (n_1 - 10n_2)(n_1 + 10n_2) = n_1^2 - 100n_2^2 = 10a_1 + a_2$$

rezultă $20n_2 + 1 \leqslant 99$ de unde $n_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Pentru $n_2 = 4$ rezultă $N_2 = 16$. Singurul număr de patru cifre care începe cu 16 și este pătrat perfect este 1 681. Pentru $n_2 \in \{1, 2, 3\}$ se obțin numere cu cel mult trei cifre. Deci numărul căutat este 1 681.

14. Se observă, cu ușurință, că o soluție este $n = 2$, $k = 1$ pentru că $|1! - 2!| = 1$. Să demonstrăm că este singura. Pentru $n = 2p$ avem:

$$|1! - 2! + 3! - 4! + \ldots + (2p-1)! - (2p)!| = |-[(2! - 1!) + (4! - 3!) + \ldots + ((2p)! - (2p-1)!)]| = |-[(2 \cdot 1! - 1!) + (4 \cdot 3! - 3!) + \ldots + ((2p) \cdot (2p-1)! - (2p-1)!)]| = 1 \cdot 1! + 3 \cdot 3! + \ldots + (2p-1) \cdot (2p-1)!. \quad (*)$$

Pentru $p = 1$ regăsim soluția. Pentru $p = 2$ avem $1 \cdot 1! + 3 \cdot 3! = 1 + 18 = 19$ care nu este pătrat perfect. Pentru $p \geqslant 3$ să observăm că, începînd cu al treilea termen al sumei (*), toți sînt multipli de 8, deci suma (*) este de forma $1 + 18 + 8\, m_1 = 8m_1' + 3$. Dar nu există nici un număr natural al cărui pătrat să fie de forma $8m_1' + 3$, deci pentru n par nu există altă soluție diferită de $n = 2$.

Pentru $n = 2p + 1$ avem:

$$|1! - 2! + 3! - 4! + 5! - \ldots + (2p-1)! - (2p)! + (2p+1)!| = |1! + (3! - 2!) + (5! - 4!) + \ldots + ((2p+1)! - (2p)!)| = |1! + (3 \cdot 2! - 2!) + (5 \cdot 4! - 4!) + \ldots + ((2p+1) \cdot (2p)! - (2p)!)| = 1! + 2 \cdot 2! + 4 \cdot 4! + \ldots + 2p \cdot (2p)!. \quad (**)$$

Pentru $p = 1$, suma (**) este 5, iar pentru $p \geqslant 2$ suma este de forma $8m_2 + 5$, deci pentru n impar egalitatea dată nu este adevărată pentru nici o valoare a lui n.

Scanned with OKEN Scanner

MEDIA ARITMETICĂ. MEDIA GEOMETRICĂ

1) Media aritmetică a numerelor a și b este numărul $M_a = \frac{a+b}{2}$. Dacă $a < b$ atunci $a < M_a < b$. În cazul în care avem n numere, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, media lor aritmetică este numărul $M_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Și în acest caz, media aritmetică este mai mare decît cel mai mic dintre ele și mai mică decît cel mai mare dintre ele. Dacă printre cele n numere, m_1 sînt egale cu a_1, m_2 numere cu a_2, $\ldots$, m_p numere sînt egale cu a_p astfel încît $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$, atunci media aritmetică se scrie:

$$M_a = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_p a_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}$$

și se mai numește *media aritmetică ponderată* a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_p$, cu ponderile $m_1, m_2, \ldots, m_p$.

2) Media geometrică a numerelor pozitive a și b este numărul $M_g = \sqrt{ab}$. Dacă $a < b$, atunci $a < M_g < b$.

3) Dacă numerele a și b sînt pozitive atunci media lor aritmetică este mai mare decît media lor geometrică. Să demonstrăm că $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Este suficient ca în inegalitatea evidentă $x^2 \geqslant 0$, pentru orice x real, să înlocuim pe x cu numărul real $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Obținem:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0,$$

de unde $a - 2\sqrt{ab} + b \geqslant 0$ și deci $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Egalitate obținem pentru $a = b$.

PROBLEME COMENTATE

1. Media aritmetică a 50 de numere este 10. Media aritmetică a primelor 40 este 12. Să se afle media aritmetică a ultimelor 10 numere.

Soluție. Cunoscînd media aritmetică putem afla cu ușurință suma numerelor. În cazul nostru, $S_{50} = 10 \cdot 50 = 500$ și $S_{40} = 12 \cdot 40 = 480$. Acum putem afla suma ultimelor 10 numere calculînd $S_{50} - S_{40} = 500 - 480 = 20$. Media căutată este, deci, $\frac{20}{10} = 2$.

Scanned with OKEN Scanner

Comentariu. În calculul mediei aritmetice putem înlocui mai multe dintre numerele date prin media lor aritmetică fără ca rezultatul să se schimbe. De exemplu, pentru calculul mediei numerelor 4, 5, 7, 12 putem proceda astfel:

$$\frac{4+5+7+12}{4}=\frac{4+\frac{5+7}{2}+\frac{5+7}{2}+12}{4}=\frac{4+6+6+12}{4}=$$

$$=\frac{4+\frac{5+7+12}{3}+\frac{5+7+12}{3}+\frac{5+7+12}{3}}{4}=\frac{4+8+8+8}{4}=7.$$

2. a) Se amestecă 20 kg bomboane de 20 de lei kilogramul cu 5 kg bomboane de 24 lei kilogramul și cu 15 kg bomboane de 16 lei kilogramul. Cît costă un kilogram de amestec?

b) Ce preț are un anumit sort de bomboane cînd kilogramul de amestec format din 5 kg din acest sort și 10 kg de 20 de lei kilogramul costă 18 lei?

c) Cu cîte kilograme de bomboane de 18 lei kilogramul trebuie să amestecăm 10 kg bomboane de 25 de lei kilogramul pentru ca amestecul să coste 20 de lei kilogramul?

Soluție. Folosim, de fiecare dată, media ponderată:

$$m=\frac{m_1c_1+m_2c_2+\ldots+m_pc_p}{m_1+m_2+\ldots+m_p}$$

unde $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sînt cantitățile, iar $c_1, c_2, \ldots, c_p$ sînt prețurile unitare. Rezultatul este prețul unitar al amestecului. Avem:

a) $$\frac{20\cdot 20+5\cdot 24+15\cdot 16}{20+5+15}=\frac{400+120+240}{40}=\frac{760}{40}=19.$$

Deci un kilogram de amestec costă 19 lei.

b) $$\frac{10\cdot 20+5x}{10+5}=18,$$

de unde $5x=70$, $x=14$, deci un kilogram de bomboane din sortul cerut costă 14 lei.

c) $$\frac{10\cdot 25+x\cdot 18}{10+x}=20,$$

de unde $250+18x=200+20x$, sau $2x=50$, deci $x=25$.

Deci sînt necesare 25 kg de bomboane de 18 lei kilogramul.

Comentariu. În același mod se pot rezolva multe probleme de amestec și aliaj. De exemplu:

S-au amestecat două soluții de apă și sare: prima cu concentrația procentuală 38%, a doua cu concentrația procentuală 78%. Amestecul obținut are concentrația 60%. Dacă masa amestecului este 1 700 g, ce cantitate din fiecare soluție a fost folosită?

Soluție. Folosim schema:

$$m_1+m_2=1\,700,$$

$$\frac{m_1c_1+m_2c_2}{m_1+m_2}=c,$$

$$\frac{m_1\cdot 38+(1\,700-m_1)78}{1\,700}=60,$$

$$19m_1+1\,700\cdot 39-39\,m_1=30\cdot 1\,700.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci 20 $m_1 = 1\,700 \cdot 9$ g sau $m_1 = 85 \cdot 9$ g $= 765$ g și $m_2 = (1\,700 - 765) = 935$ g.

3. Fie numerele a_1, a_2, a_3, a_4 reale pozitive. Să se arate că :

$$\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \sqrt{a_1a_4} + \sqrt{a_2a_3} + \sqrt{a_2a_4} + \sqrt{a_3a_4} \leqslant \frac{3}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4).$$

Soluție. Putem scrie, succesiv :

$$\sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_2); \quad \sqrt{a_1a_3} \leqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_3); \quad \sqrt{a_1a_4} \leqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_4);$$

$$\sqrt{a_2a_3} \leqslant \frac{1}{2}(a_2 + a_3); \sqrt{a_2a_4} \leqslant \frac{1}{2}(a_2 + a_4); \quad \sqrt{a_3a_4} \leqslant \frac{1}{2}(a_3 + a_4).$$

Adunînd aceste inegalități, membru cu membru, obținem :

$$\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \sqrt{a_1a_4} + \sqrt{a_2a_3} + \sqrt{a_2a_4} + \sqrt{a_3a_4} \leqslant \frac{1}{2}(3a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 3a_4) =$$

$$= \frac{3}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4).$$

Comentariu. Inegalitatea cerută este o aplicație imediată a inegalității mediilor. Evident egalitate obținem pentru $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. Se poate demonstra că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere reale pozitive atunci :

$$\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \ldots + \sqrt{a_1a_n} + \sqrt{a_2a_3} + \ldots + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leqslant \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

4. Fie numerele reale a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 astfel încît dacă unul și numai unul dintre ele se mărește de 11 ori, media lor aritmetică se mărește de 3 ori. Demonstrați că media aritmetică a celorlalte patru numere este egală cu media aritmetică a numerelor date.

Soluție. Fie :

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = k.$$

Deci $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5k$. Presupunem că se mărește de 11 ori numărul a_1. Conform enunțului, avem :

$$\frac{11a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 3k.$$

Înlocuind $a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ cu $5k - a_1$ avem $11a_1 + 5k - a_1 = 15k$, $10a_1 = 10k$, deci $a_1 = k$, adică a_1 este egal cu media aritmetică a numerelor date. Rezultă că :

$$\frac{a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{4} = k.$$

Scanned with OKEN Scanner

Comentarii. 1). Reanalizați problema. Faptul că $a_1 = k$ era previzibil. Vă explicați de ce?
2). Numerele 11 și 3 nu au fost alese prin încercări. Să ne punem următoarea problemă: Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale a căror medie aritmetică este k. Se înlocuiește a_1 cu $x \cdot a_1$ astfel încît să fie îndeplinite două condiții: media aritmetică a numerelor $xa_1, a_2, \ldots, a_n$ este pk, iar media aritmetică a numerelor $a_2, a_3, \ldots, a_n$ este k.
Determinați x.

Soluție. Să demonstrăm întîi că $a_1 = k$. Avem $a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (n-1)k$ și $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = nk$, deci $a_1 + (n-1)k = nk$.
Rezultă $a_1 = k$. Acum avem $x \cdot k + (n-1)k = npk$, deci $x + n - 1 = np$, de unde rezultă $x = np - n + 1$. În cazul problemei date, $n = 5$, $p = 3$ de unde $x = 15 - 5 + 1 = 11$.

5. Scrieți în ordine crescătoare numerele:

$$a_0 = a,\ a_1 = \sqrt{a_0 b_0},\ a_2 = \sqrt{a_1 b_1},\ a_3 = \sqrt{a_2 b_2};$$

$$b_0 = b,\ b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},\quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},\quad b_3 = \frac{a_2 + b_2}{2},$$

știind că $0 < a < b$.

Soluție. Dacă $a < b$ atunci $a < \dfrac{a+b}{2} < b$ și $a < \sqrt{ab} < b$, conform proprietăților mediilor. Pe de altă parte, $\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$ (inegalitatea este strictă pentru că $a \neq b$) deci:

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b,$$

adică $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$.
Repetăm raționamentul pentru $a_1 < b_1$ și obținem:

$$a_1 < \frac{a_1 + b_1}{2} < b_1,\ a_1 < \sqrt{a_1 b_1} < b_1$$

și cum $\sqrt{a_1 b_1} < \dfrac{a_1 + b_1}{2}$, rezultă $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$. Analog, $a_2 < a_3 < b_3 < b_2$. Din cele trei șiruri de inegalități rezultă ordonarea cerută:

$$a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < b_3 < b_2 < b_1 < b_0.$$

Comentariu. Dacă se dădeau numerele a și b cu $0 < a < b$ și:

$$a_0 = a,\ a_1 = \sqrt{a_0 b_0},\ \ldots, a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}};$$

$$b_0 = b,\ b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},\ \ldots, b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

atunci, repetînd raționamentul, obținem ordinea:

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_n < b_n < \ldots < b_1 < b_0$$

de unde putem observa că numerele a_i sînt în ordine crescătoare, iar numerele b_i sînt în ordine descrescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

6. Dacă numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ au produsul egal cu 1 atunci :

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

Soluție. Folosind inegalitatea mediilor pentru numerele 1 și a_k, $k = 1,2, \ldots, n$:

$$1 + a_k \geqslant 2\sqrt{a_k},$$

și înlocuind pe k cu $1, 2, \ldots, n$, obținem :

$$1 + a_1 \geqslant 2\sqrt{a_1},\ 1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_2},\ \ldots,\quad 1 + a_n \geqslant 2\sqrt{a_n}.$$

Înmulțind membru cu membru cele n inegalități obținem :

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Dar, din ipoteză, $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, deci :

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

Egalitate obținem dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

Comentariu. Este necesar să se reținâ că la inegalitățile nestricte trebuie precizat și cazul în care se obține egalitate. Dacă vom considera următoarea inegalitate ușor de demonstrat :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant \sqrt{a + b + c}$$

unde a, b, c sînt numere pozitive, cînd se obține egalitate?

Egalitate obținem în cazul cînd cel puțin două dintre numere sînt nule.

7. Arătați că :

$$\left(\frac{12}{5}\right)^5 + \left(\frac{12}{7}\right)^5 > 64.$$

Soluție. Avem :

$$\left(\frac{12}{5}\right)^5 + \left(\frac{12}{7}\right)^5 = \left(1 + \frac{7}{5}\right)^5 + \left(1 + \frac{5}{7}\right)^5 > 2\sqrt{\left[\left(1 + \frac{7}{5}\right)\left(1 + \frac{5}{7}\right)\right]^5} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{\left(1 + 1 + \frac{7}{5} + \frac{5}{7}\right)^5} > 2 \cdot \sqrt{(2 + 2)^5} = 2 \cdot \sqrt{4^5} = 2\sqrt{(2^5)^2} = 2 \cdot 2^5 = 64.$$

Comentariu. Aici, cazul particular prezentat este mai „ascuns" decît cel general, adică :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1},$$

unde $a, b > 0$ și $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Putem scrie, aplicînd inegalitatea mediilor :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2\sqrt{\left[\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{a}\right)\right]^n} =$$

$$= 2\sqrt{\left(1 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^n} \geqslant 2\sqrt{(2 + 2)^n} = 2\sqrt{4^n} = 2 \cdot \sqrt{(2^n)^2} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Am aplicat de două ori inegalitatea mediilor : odată pentru numerele $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n$ și $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$ și a doua oară numerelor $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$. Egalitate obținem dacă $a = b$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Să se demonstreze că pentru orice x număr real avem $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

Soluție. Scriem, succesiv:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Aplicînd inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2\sqrt{\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = 2.$$

Egalitate obținem pentru $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, deci $x^2+1=1$, de unde $x=0$.

Comentarii. 1). Se poate da și următoarea demonstrație:

Evident că $x^4 \geqslant 0$ pentru orice x real. Adunăm în ambii membri ai inegalității $x^4 \geqslant 0$ expresia $4x^2+4$. Obținem $x^4+4x^2+4 \geqslant 4x^2+4$, adică $(x^2+2)^2 \geqslant 4(x^2+1)$, sau $x^2+2 \geqslant 2\sqrt{x^2+1}$ și deci $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

Pornind de la inegalitatea evidentă $x^2 \geqslant 0$, încercați să deduceți inegalitățile:

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab;\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2;\ a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

2). În afară de media aritmetică și media geometrică se mai pot defini următoarele două medii:

Media armonică a numerelor nenule $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este:

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Media pătratică a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ este:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

Dacă a și b sînt două numere pozitive, atunci demonstrați următoarele inegalități:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

unde $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ și reprezintă media armonică a numerelor nenule a și b.

Scanned with OKEN Scanner

9. 1) Să se demonstreze că dacă suma a două numere strict pozitive este constantă, atunci produsul este maxim cînd numerele sînt egale.

2) Să se demonstreze că dacă produsul a două numere strict pozitive este constant, suma acestora este minimă cînd numerele sînt egale.

Soluţie. 1) Avem $a + b = 2k$, $a > 0$, $b > 0$ şi k este o constantă. Trebuie să aflăm cînd produsul ab este maxim. Este suficient să aplicăm inegalitatea mediilor $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

Deci $\sqrt{ab} \leqslant k$. Pentru că ambii membri sînt pozitivi avem, ridicînd la pătrat, $ab \leqslant k^2$. Maximul produsului se realizează atunci cînd avem egalitate, adică $ab = k^2$. Dar inegalitatea mediilor devine egalitate cînd factorii sînt egali, deci cînd $a = b = k$.

Interpretare. Rezultatul poate fi formulat astfel: dintre toate dreptunghiurile cu acelaşi perimetru, pătratul are aria cea mai mare.

2) Din $a > 0$, $b > 0$ şi ab constant rezultă că există $k > 0$ astfel încît $ab = k^2$. Aplicăm din nou inegalitatea mediilor:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} = k,$$

adică $a + b \geqslant 2k$.

Minimul sumei se obţine cînd inegalitatea devine egalitate adică $a + b = 2k$ şi aceasta se realizează cînd $a = b = k$.

Interpretare. Rezultatul se poate reformula astfel: dintre toate dreptunghiurile cu arie constantă, perimetrul cel mai mic îl are pătratul.

Comentarii. 1). Rezultatele de mai sus puteau fi obţinute şi prin alte metode. De exemplu, pentru punctul 1) se putea da şi următoarea demonstraţie: fie $a + b = 2k$ şi fie P produsul numerelor a şi b. Atunci:

$$P = a \cdot b = a(2k - a) = 2ak - a^2 = k^2 - k^2 + 2ak - a^2 = k^2 - (a^2 - 2ak + k^2) = k^2 - (a-k)^2.$$

Produsul maxim se obţine cînd din k^2 se scade cel mai puţin adică atunci cînd $(a - k)$ este minim. Dar minimul lui $(a - k)^2$ este 0 şi se obţine pentru $a = k$. Dacă $a = k$ rezultă $a = b = k$ şi $P_{max} = k^2$.

2). Se poate demonstra că produsul mai multor numere strict pozitive de sumă constantă este cu atît mai mare cu cît numerele sînt mai apropiate de media lor aritmetică şi el devine maxim cînd numerele sînt egale.

10. Să se demonstreze că între oricare două numere raţionale se mai află cel puţin un alt număr raţional.

Soluţie. Fie a şi b cu $a < b$ două numere raţionale. Suma lor este un număr raţional şi de asemenea, semisuma lor este un număr raţional. Într-adevăr, dacă $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $q \neq 0$, avem:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}{2} = \frac{mq + np}{2nq}$$

şi cum $mq + np \in \mathbb{Z}$, $2nq \in \mathbb{Z}$, $2nq \neq 0$, rezultă că:

$$\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Dar $\frac{a+b}{2}$ reprezintă media aritmetică a numerelor a şi b şi ştim că aceasta este mai mare decît cel mai mic dintre numerele a şi b şi mai mică decît cel mai mare dintre ele. Deci:

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

Scanned with OKEN Scanner

Am demonstrat, astfel, că între oricare două numere raționale se mai află cel puțin încă un număr rațional.

Comentarii. 1). Evident că raționamentul se poate repeta pentru fiecare dintre perechile $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, respectiv $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$. Putem în acest mod să arătăm că între două numere raționale se găsesc oricîte alte numere raționale.

2). Se poat aplica aceeași metodă pentru a arăta că între două numere iraționale se mai află încă un număr irațional? Nu! Contraexemplu: numerele $-\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$ sînt iraționale, dar media lor aritmetică este 1, deci un număr rațional.

Pentru a demonstra că între două numere iraționale se mai află încă un număr irațional putem proceda astfel:

Se demonstrează ușor că suma dintre un număr irațional și unul rațional este un număr irațional, apoi, folosind media aritmetică, se arată că între un număr rațional și unul irațional se află cel puțin un număr irațional. Fie acum a și b două numere iraționale. Dacă media lor aritmetică $\frac{a+b}{2}$ este număr irațional problema este rezolvată. Dacă $\frac{a+b}{2}$ este rațional atunci, cu siguranță, între a și $\frac{a+b}{2}$ se află un număr irațional și, de asemenea, încă unul între $\frac{a+b}{2}$ și b. Se poate demonstra că între două numere reale se află cel puțin un număr rațional (cum?) și cel puțin un număr irațional.

3). Există numere iraționale pentru care numai două dintre cifre se repetă de o infinitate de ori. De exemplu:

$$5{,}1010010001000010000001\ldots.$$

Dați un exemplu de număr irațional în care numai trei cifre se repetă de o infinitate de ori.

11. Dacă $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, iar p și q sînt numere naturale nenule cu $p > q$, atunci:

$$\frac{x^p - 1}{p} > \frac{x^q - 1}{q}.$$

Soluție. Folosind identitatea:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

obținem:

$$\frac{(x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1)}{p} > \frac{(x-1)(x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1)}{q}.$$

Pentru $x > 1$, prin împărțirea ambilor membri prin $x - 1$, obținem:

$$\frac{x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x^q + x^{q-1} + \ldots + x + 1}{p} > \frac{x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1}{q}.$$

Numărătorii au p, respectiv q termeni ($p > q$) și deci cei doi membri ai inegalității reprezintă mediile aritmetice ale numerelor $x^{p-1}, \ldots, x^q, x^{q-1}, \ldots, x, 1$, respectiv $x^{q-1}, x^{q-2}, \ldots, x, 1$. Să facem următoarea observație: dacă:

$$c < \frac{a+b}{2} < d$$

atunci:

$$\frac{a+b+c}{3} < \frac{a+b}{2} < \frac{a+b+d}{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultat care poate fi extins în felul următor: Dacă:

$$a < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < b$$

atunci:

$$\frac{a + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n+1} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b}{n+1}$$

adică, dacă la mai multe numere alăturăm alte numere inferioare (respectiv superioare) atunci media lor scade (respectiv crește). În cazul nostru, pentru $x > 1$ și $p > q$, oricare dintre numerele $x^{p-1}, x^{p-2}, \ldots, x^q$ este mai mare decît oricare dintre numerele, $x^{q-1}, x^{q-2}, \ldots, x, 1$ și deci:

$$\frac{x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x^q + x^{q-1} + \ldots + x + 1}{p} > \frac{x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1}{q}.$$

Pentru $0 < x < 1$, prin împărțirea cu $x - 1$ se schimbă ensul inegalității și deci trebuie să arătăm că:

$$\frac{x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x^q + x^{q-1} + \ldots + x + 1}{p} < \frac{x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1}{q}$$

ceea ce este adevărat conform observației făcute pentru că oricare dintre numerele $x^{p-1}, x^{p-2}, \ldots, \ldots, x^q$ este mai mic, în cazul $x \in (0, 1)$ și $p > 2$, decît oricare dintre numerele $x^{q-1}, x^{q-2}, \ldots, x, 1$.

Comentarii. 1). Soluția elementară dată acestei inegalități s-a bazat pe o înțelegere profundă a noțiunii de medie aritmetică.

2). Folosind noțiuni ce depășesc cadrul gimnazial se poate demonstra că inegalitatea rămîne adevărată și pentru exponenți care nu sînt numere naturale.

12. Fie numerele a_1, a_2, a_3, a_4 reale pozitive astfel încît $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$. Să se demonstreze că:

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + a_4} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2 + a_4} + \frac{a_4}{1 + a_1 + a_2 + a_3} \geqslant \frac{4}{7}.$$

Soluție. Din $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ rezultă că $a_2 + a_3 + a_4 = 1 - a_1$; $a_1 + a_3 + a_4 = 1 - a_2$, $a_1 + a_2 + a_4 = 1 - a_3$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1 - a_4$. Notînd cu S membrul stîng al inegalității avem:

$$S = \frac{a_1}{1 + 1 - a_1} + \frac{a_2}{1 + 1 - a_2} + \frac{a_3}{1 + 1 - a_3} + \frac{a_4}{1 + 1 - a_4} = \frac{a_1}{2 - a_1} + \frac{a_2}{2 - a_2} +$$

$$+ \frac{a_3}{2 - a_3} + \frac{a_4}{2 - a_4} = \frac{a_1 - 2 + 2}{2 - a_1} + \frac{a_2 - 2 + 2}{2 - a_2} + \frac{a_3 - 2 + 2}{2 - a_3} + \frac{a_4 - 2 + 2}{2 - a_4} = -1 +$$

$$+ \frac{2}{2 - a_1} - 1 + \frac{2}{2 - a_2} - 1 + \frac{2}{2 - a_3} - 1 + \frac{2}{2 - a_4} = -4 + 2\left(\frac{1}{2 - a_1} + \frac{1}{2 - a_2} + \frac{1}{2 - a_3} + \frac{1}{2 - a_4}\right).$$

Să observăm că:

$$2 - a_1 + 2 - a_2 + 2 - a_3 + 2 - a_4 = 8 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 7.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci:

$$S = -4 + \frac{2}{7} \cdot 7\left(\frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + \frac{1}{2-a_3} + \frac{1}{2-a_4}\right) = -4 + \frac{2}{7}[(2-a_1)+$$

$$+ (2-a_2) + (2-a_3) + (2-a_4)] \cdot \left(\frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + \frac{1}{2-a_3} + \frac{1}{2-a_4}\right) = -4 +$$

$$+ \frac{2}{7}\left[1+1+1+1+\left(\frac{2-a_1}{2-a_2} + \frac{2-a_2}{2-a_1}\right) + \left(\frac{2-a_1}{2-a_3} + \frac{2-a_3}{2-a_1}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{2-a_1}{2-a_4} + \frac{2-a_4}{2-a_1}\right) + \left(\frac{2-a_2}{2-a_3} + \frac{2-a_3}{2-a_2}\right) + \left(\frac{2-a_2}{2-a_4} + \frac{2-a_4}{2-a_2}\right) +$$

$$\left. + \left(\frac{2-a_3}{2-a_4} + \frac{2-a_4}{2-a_3}\right)\right].$$

Dar $2 - a_i > 0$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, și știm că dacă $x > 0$, $y > 0$, conform inegalității mediilor $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$. Deci:

$$S \geqslant -4 + \frac{2}{7}[4+2+2+2+2+2+2+2] = -4 + \frac{2}{7} \cdot 16 = \frac{-28+32}{7} = \frac{4}{7}.$$

Egalitatea se obține dacă $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{4}$.

Comentariu. Problema admite următoarea generalizare: Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive ($n \geqslant 2$) astfel încît $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$. Atunci:

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\ldots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\ldots+a_n} + \ldots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{2n-1}.$$

13. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi. Demonstrați inegalitățile:

a) $\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < 1$;

b) $\left|\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right| < \frac{1}{8}$.

Soluție. Un calcul direct nu conduce la rezultat. Să încercăm să transformăm expresia din modul.

De exemplu, $c - a$ se poate înlocui prin $(c-b) + (b-a)$ și obținem:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{(c-b)+(b-a)}{c+a} = \frac{a-b}{a+b} - \frac{a-b}{c+a} + \frac{b-c}{b+c} - \frac{b-c}{c+a} =$$

$$= (a-b)\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}\right) + (b-c)\left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a}\right) = (a-b)\frac{c+a-a-b}{(a+b)(c+a)} +$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+(b-c)\frac{c+a-b-c}{(b+c)(c+a)}=\frac{(a-b)(c-b)}{(a+b)(c+a)}+\frac{(b-c)(a-b)}{(b+c)(c+a)}=$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)}{c+a}\left[\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}\right]=\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=-\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

De aici rezultă egalitatea:

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|=\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|$$

a) Să ne ocupăm de primul punct al problemei; a, b, c fiind numere pozitive, sînt adevărate relaţiile $|a-b|<a+b$, $|b-c|<b+c$ şi $|c-a|<c+a$. Deci:

$$\left|\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{c-a}{c+a}\right|=\frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|}{(a+b)(b+c)(c+a)}<\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=1.$$

Comentariu. Condiţia că a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi nu a fost esenţială în demonstraţie. Era suficient ca a, b, c să fie numere pozitive.

b) Ştim că lungimea oricărei laturi a unui triunghi este mai mare decît modulul diferenţei lungimilor celorlalte două, adică $|a-b|<c$, $|b-c|<a$, $|c-a|<b$. Avem, deci:

$$\left|\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{c-a}{c+a}\right|=\frac{|a-b|\cdot|b-c|\cdot|c-a|}{(a+b)(b+c)(c+a)}<\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Dar $abc=\sqrt{(abc)^2}=\sqrt{(ab)(bc)(ca)}=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}$ pentru că $a>0$, $b>0$, $c>0$. Obţinem:

$$\left|\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{c-a}{c+a}\right|<\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\cdot\frac{\sqrt{ca}}{c+a}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

pentru că din inegalitatea $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$ rezultă $\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\leqslant\frac{1}{2}$.

Cu aceasta problema este complet rezolvată.

Comentariu. Rezolvarea problemei, deloc uşoară, a necesitat multă inventivitate şi se dovedeşte destul de instructivă. O remarcă în plus este faptul că la punctul b) se cere o îmbunătăţire a aproximării de la punctul a). Interesant este şi faptul că modulul dat devine 0, nu neapărat pentru triunghiul echilateral, ci şi pentru cel isoscel.

14. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, să se demonstreze că:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3. \qquad (*)$$

Soluţie. Notăm $b+c-a=x$, $c+a-b=y$, $a+b-c=z$. Adunînd relaţiile obţinem $a+b+c=x+y+z$.

Cum $b+c=a+x$, rezultă $a=\frac{y+z}{2}$ şi, analog, $b=\frac{x+z}{2}$, $c=\frac{x+y}{2}$.

Pe de altă parte, cum suma lungimilor a două laturi ale unui triunghi este mai mare decît lungimea celei de-a treia, rezultă $x>0$, $y>0$, $z>0$. Inegalitatea iniţială devine:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geqslant 3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțind ambii membri cu 2 și dînd numitor fiecărui termen de la numărător, inegalitatea devine:

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geqslant 6.$$

Observînd că în membrul stîng apar termeni de forma $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$, grupăm convenabil și putem scrie:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geqslant 6.$$

Inegalitatea este adevărată; ntă că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$ pentru a și b numere strict pozitive.

Egalitatea se obține dacă $x=y=z$ se revine la $b+c-a=c+a-b=a+b-c$, adică $a=b=c$, deci pentru triunghiul echilateral.

Comentarii. 1). Metoda expusă, adică introducerea unor notații suplimentare și folosirea inegalității mediilor, se aplică în multe alte inegalități similare.

2). Să demonstrăm următoarea inegalitate: dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere pozitive $(n\geqslant 2)$, atunci:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Notăm $s=a_1+a_2+\ldots+a_n$ și $s_k=s-a_k$, $(a_k=s-s_k)$. Inegalitatea devine:

$$\frac{s-s_1}{s_1}+\frac{s-s_2}{s_2}+\ldots+\frac{s-s_n}{s_n}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

sau:

$$(n-1)\left(\frac{s-s_1}{s_1}+\frac{s-s_2}{s_2}+\ldots+\frac{s-s_n}{s_n}\right)\geqslant n.$$

Dar:

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=s-a_1+s-a_2+\ldots+s-a_n=$$
$$=ns-(a_1+a_2+\ldots+a_n)=ns-s=s(n-1).$$

Atunci avem:

$$(n-1)\frac{s-s_1}{s_1}=\frac{(n-1)s-(n-1)s_1}{s_1}=\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n-(n-1)s_1}{s_1}=$$
$$=\frac{s_2+s_3+\ldots+s_n-(n-2)s_1}{s_1}=\frac{s_2+s_3+\ldots+s_n}{s_1}-(n-2)=$$
$$=\frac{s_2}{s_1}+\frac{s_3}{s_1}+\ldots+\frac{s_n}{s_1}-(n-2).$$

Scrînd fiecare termen din membrul stîng al inegalității sub această formă și adunîndu-i obținem:

$$\frac{s_2}{s_1}+\frac{s_3}{s_1}+\ldots+\frac{s_n}{s_1}+\frac{s_1}{s_2}+\frac{s_3}{s_2}+\ldots+\frac{s_n}{s_2}+\ldots+\frac{s_1}{s_n}+\frac{s_2}{s_n}+\ldots+\frac{s_{n-1}}{s_n}-$$
$$-n(n-2)\geqslant n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Grupînd convenabil, inegalitatea devine:

$$\left(\frac{s_2}{s_1}+\frac{s_1}{s_2}\right)+\left(\frac{s_3}{s_1}+\frac{s_1}{s_3}\right)+\ldots+\left(\frac{s_{n-1}}{s_n}+\frac{s_n}{s_{n-1}}\right)-n(n-2)\geqslant n.$$

Dar toate sumele s_k sînt strict pozitive, deci $\frac{s_i}{s_j}+\frac{s_j}{s_i}\geqslant 2$ (inegalitatea mediilor).

Să numărăm cîte sume de forma $\frac{s_i}{s_j}+\frac{s_j}{s_i}$ sînt. Avem, la numărători, $n-1$ de s_1, $n-1$ de s_2, $n-1$ de s_3, ..., $n-1$ de s_n deci, în total, $n(n-1)$ termeni în toate parantezele. Cum în fiecare paranteză sînt doi termeni înseamnă că numărul total de sume de forma $\frac{s_i}{s_j}+\frac{s_j}{s_i}$ este $\frac{n(n-1)}{2}$. Rămîne că:

$$(n-1)\left[\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\right]\geqslant$$

$$\geqslant \underbrace{2+2+\ldots+2}_{\text{de }\frac{n(n-1)}{2}\text{ ori}}-n(n-2)=n(n-1)-n(n-2)=n^2-n-n^2+2n=n$$

sau:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\ldots+a_n}+\frac{a_2}{a_1+a_3+\ldots+a_n}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}\geqslant\frac{n}{n-1}.$$

Egalitate avem pentru $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

3). Cu ajutorul inegalității (*) putem demonstra o importantă inegalitate geometrică: raza cercului circumscris unui triunghi este mai mare sau cel puțin egală cu diametrul cercului înscris în triunghi, adică $R\geqslant 2r$. Considerăm cunoscute relațiile:

$$R=\frac{abc}{4\mathcal{S}},\quad r=\frac{\mathcal{S}}{p},\quad \mathcal{S}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde $\mathcal{S}$ este aria triunghiului, iar p, semiperimetrul său. Avem;

$$\frac{R}{2r}=\frac{abcp}{8\mathcal{S}^2}=\frac{abcp}{8p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

Ținînd cont de notațiile folosite în demonstrația inegalității (*) avem:

$$\frac{R}{2r}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{2\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}}=\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{y+z}{2\sqrt{yz}}\cdot\frac{z+x}{2\sqrt{zx}}\geqslant$$

$$\geqslant 1\cdot 1\cdot 1=1,$$

deci $R\geqslant 2r$. Egalitate obținem pentru triunghiul echilateral. Am folosit inegalitatea:

$$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\geqslant 1,\quad a>0,\quad b>0.$$

Scanned with OKEN Scanner

15. Să se rezolve, în numere reale, sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} 2x = y + \dfrac{2}{y}; \\ 2y = z + \dfrac{2}{z}; \\ 2z = x + \dfrac{2}{x}. \end{cases}$$

Soluție. Să observăm că dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluție și $x_0 > 0$, atunci $z_0 > 0$ și $y_0 > 0$. Mai mult, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție atunci și $(-x_0, -y_0, -z_0)$ este soluție. Dacă x este un număr pozitiv atunci, pentru a exista egalitățile, și y și z vor fi pozitive. Putem, în această ipoteză, să aplicăm inegalitatea mediilor :

$$2z = x + \frac{2}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$$

și, analog :

$$2x = y + \frac{2}{y} \geqslant 2\sqrt{2}, \; 2y = z + \frac{2}{z} \geqslant 2\sqrt{2},$$

de unde, prin însumare, membru cu membru, obținem :

$$2(x + y + z) = x + y + z + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geqslant 6\sqrt{2}.$$

Din $2(x + y + z) = x + y + z + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z}$, rezultă :

$$x + y + z = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right), \tag{1}$$

iar din $2(x + y + z) \geqslant 6\sqrt{2}$ rezultă :

$$x + y + z \geqslant 3\sqrt{2}. \tag{2}$$

Din $2x \geqslant 2\sqrt{2}$, obținem $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ și, analog, $\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\dfrac{1}{z} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, care, prin însumare membru cu membru, dau :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Din (1), (2) și (3) rezultă că :

$$x + y + z = 3\sqrt{2}. \tag{4}$$

Cum $x \geqslant \sqrt{2}$, $y \geqslant \sqrt{2}$, $z \geqslant \sqrt{2}$, egalitatea (4) are loc numai dacă $x = y = z = \sqrt{2}$. De aici rezultă că singura soluție pozitivă a sistemului este $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ și deci acesta va mai admite și soluția $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Comentariu. Soluția este deosebită. Aceasta a necesitat numeroase observații și o bună tehnică de interpretare a egalităților și inegalităților.

PROBLEME PROPUSE

1. Media aritmetică a numerelor a_1 și a_2 este k, media aritmetică a numerelor a_3, a_4 și a_5 este $9k$, iar media aritmetică a numerelor a_6, a_7, a_8, a_9 este $88k$. Care este media aritmetică a celor 9 numere?

Scanned with OKEN Scanner

2. Se amestecă trei soluții. Notînd cu m_1, m_2, m_3 masele lor și cu c_1, c_2, c_3 concentrațiile procentuale, respectiv cu c concentrația procentuală a soluției finale, să se rezolve fiecare din punctele de mai jos :

a) Se dau : $m_1 = 200$ g, $c_1 = 12\,\%$; $m_2 = 120$ g, $c_2 = 18\,\%$; $m_3 = 180$ g, $c_3 = 24\,\%$. Se cere concentrația procentuală a soluției finale.

b) Se dau : $m_1 = 200$ g, $c_1 = 12\,\%$; $m_2 = 120$ g, $c_2 = 18\,\%$; $m_3 = 180$ g, $c = 21\,\%$. Să se afle concentrația procentuală a soluției de masă m_3.

c) Se dau : $m_1 = 200$ g, $c_1 = 12\,\%$; $m_2 = 120$ g, $c_2 = 18\,\%$; $c_3 = 24\,\%$ și $c = 20\,\%$. și se cere masa soluției de concentrație procentuală c_3.

3. Fie a, b, c trei numere strict pozitive astfel încît $a + b + c = 1$. Demonstrați că :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

4. Să se determine numerele reale a_1, a_2, a_3, a_4 care verifică egalitatea :

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2 - 1} + \sqrt{a_3 - 2} + \sqrt{a_4 - 3} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - 1.$$

5. Dacă a și b sînt numere pozitive, astfel încît $a + b > 1$, atunci :

$$a^4 + b^4 > \frac{1}{8}.$$

6. Fie a_1, a_2, a_3, a_4 numere strict pozitive astfel încît $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$. Să se arate că :

$$\sqrt{a_1(a_2 + a_3 + a_4)} + \sqrt{a_2(a_1 + a_3 + a_4)} + \sqrt{a_3(a_1 + a_2 + a_4)} + \sqrt{a_4(a_1 + a_2 + a_3)} \leqslant 2.$$

Generalizare.

7. Să se cerceteze dacă printre perechile (a, b) de numere pozitive există unele pentru care

$$f(a, b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

ia o cea mai mică valoare.

8. Dacă $x + y = 1$, $x > 0$, $y > 0$, atunci $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9$.

9. Să se stabilească semnul numărului :

$$a = 50\,[(0{,}3)^{100} - 1] - 100\,[(0{,}3)^{50} - 1].$$

10. Fie triunghiul ABC dreptunghic ($m(\sphericalangle A) = 90°$). Să se demonstreze inegalitățile :

a) $\frac{ap}{bc} \geqslant 1 + \sqrt{2}$; b) $\frac{a(b + c)}{\mathcal{S}} \geqslant 4\sqrt{2}$; c) $\frac{h_a}{p} < \frac{4}{9}$.

(Notațiile sînt cele consacrate : a, lungimea ipotenuzei, b și c lungimile catetelor, p semiperimetrul, $\mathcal{S}$ aria, h_a lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei).

11. Să se demonstreze că dacă cel puțin două dintre numerele reale a, b, c sînt diferite de 0, atunci are loc inegalitatea :

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

12. Dacă a, b, c, d sînt numere reale, pozitive, nenule, arătați că :

$$\frac{a}{b + c + d} + \frac{b}{a + c + d} + \frac{c}{a + b + d} + \frac{d}{a + b + c} \geqslant \frac{4}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

13. Dacă a, b, c, d sînt lungimile laturilor, iar e, f lungimile diagonalelor unui patrulater inscriptibil avem:

$$\min\{a, b, c, d\} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{ef}.$$

14. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \geqslant 3,$$

unde a b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi.

15. Să se determine toate punctele P din interiorul unui triunghi dat ABC pentru care suma $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$ este minimă, unde D, E, F sînt picioarele perpendicularelor din P pe $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$.

SOLUȚII

1. Avem $a_1 + a_2 = 2k$; $a_3 + a_4 + a_5 = 9k$; $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 88k$. Deci media aritmetică este:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{9} = \frac{2k + 9k + 88k}{9} = 11k.$$

2. Se folosește, la fel ca în problema comentată nr. 2, media aritmetică ponderată:

$$\frac{m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3}{m_1 + m_2 + m_3} = c.$$

Avem:

a) $\frac{200 \cdot 12 + 120 \cdot 18 + 180 \cdot 24}{200 + 120 + 180} = \frac{2\,400 + 2\,160 + 4\,320}{500} = \frac{8\,880}{500} = 17{,}76$,

$c = 17{,}76\,\%$;

b) $\frac{200 \cdot 12 + 120 \cdot 18 + 180 \cdot c_3}{200 + 120 + 180} = 21$; $\frac{2\,400 + 2\,160 + 180 \cdot c}{500} = 21$;

$4\,560 + 180 \cdot c_3 = 10\,500$; $180c_3 = 5\,940$; $c_3 = 33\,\%$.

c) $\frac{200 \cdot 12 + 120 \cdot 18 + m_3 \cdot 24}{200 + 120 + m_3} = 20$; $\frac{2\,400 + 2\,160 + m_3 \cdot 24}{320 + m_3} = 20$;

$4\,560 + m_3 \cdot 24 = 6\,400 + 20m_3$; $4m_3 = 1\,840$; $m_3 = 460$ g.

3. Avem:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1 \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) =$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geqslant 3 + 2 + 2 + 2 = 9.$$

Egalitatea se obține pentru $a = b = c$. Se poate demonstra următoarea inegalitate: dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere strict pozitive atunci:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

4. Avem:

$$\sqrt{a_1} \leqslant \frac{a_1 + 1}{2}; \quad \sqrt{a_2 - 1} \leqslant \frac{(a_2 - 1) + 1}{2} = \frac{a_2}{2};$$

$$\sqrt{a_3 - 2} \leqslant \frac{(a_3 - 2) + 1}{2} = \frac{a_3 - 1}{2}; \qquad \sqrt{a_4 - 3} \leqslant \frac{a_4 - 3 + 1}{2} = \frac{a_4 - 2}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Însumînd, obținem :

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2-1}+\sqrt{a_3-2}+\sqrt{a_4-3}\leqslant\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1=$$

$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4)-1.$$

Inegalitatea devine egalitate dacă numerele cărora le-am aplicat inegalitatea mediilor devin egale. Deci $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$. Se poate formula următoarea generalizare :

Să se determine numerele reale care verifică egalitatea :

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2-1}+\sqrt{a_3-2}+\ldots+\sqrt{a_n-(n-1)}=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\ldots+a_n)-\frac{n(n-3)}{4}.$$

5. Folosim inegalitatea mediilor :

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab.$$

Atunci vom avea :

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\geqslant(a+b)^2-2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2}.$$

Dar $a+b>1$ și deci $a^2+b^2>\frac{1}{2}$. Folosim din nou inegalitatea mediilor :

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab,\ \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2\geqslant a^2b^2.$$

și obținem :

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\geqslant(a^2+b^2)^2-2\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{2}$$

și cum $a^2+b^2>\frac{1}{2}$, rezultă $a^4+b^4>\frac{\frac{1}{4}}{2}=\frac{1}{8}$.

6. Avem, succesiv :

$$\sqrt{a_1(a_2+a_3+a_4)}+\sqrt{a_2(a_1+a_3+a_4)}+\sqrt{a_3(a_1+a_2+a_4)}+$$
$$+\sqrt{a_4(a_1+a_2+a_3)}=\sqrt{a_1(1-a_1)}+\sqrt{a_2(1-a_2)}+\sqrt{a_3(1-a_3)}+\sqrt{a_4(1-a_4)}.$$

Dar $\sqrt{a_1(1-a_1)}\leqslant\frac{a_1+(1-a_1)}{2}=\frac{1}{2}$ și, analog, $\sqrt{a_2(1-a_2)}\leqslant\frac{1}{2}$, $\sqrt{a_3(1-a_3)}\leqslant\frac{1}{2}$, $\sqrt{a_4(1-a_4)}\leqslant\frac{1}{2}$. Rezultă că :

$$\sqrt{a_1(a_2+a_3+a_4)}+\sqrt{a_2(a_1+a_3+a_4)}+$$
$$+\sqrt{a_3(a_1+a_2+a_4)}+\sqrt{a_4(a_1+a_2+a_3)}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2.$$

Generalizare. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}$ numere strict pozitive astfel încît $a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n}=1$. Să se arate că :

$$\sqrt{a_1(a_2+a_3\ldots+a_{2n})}+\sqrt{a_2(a_1+a_3+\ldots+a_{2n})}+\ldots+\sqrt{a_{2n}(a_1+a_2+\ldots+a_{2n-1})}\leqslant n.$$

Scanned with OKEN Scanner

7. Să observăm că $\frac{a^4}{b^4} - \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)^2 + \frac{a^2}{b^2} - 1$. Deci:

$$f(a, b) = \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Dar, din inegalitatea mediilor, $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geqslant 2$ și $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, deci:

$$f(a, b) \geqslant \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)^2 + 2.$$

Suma din membrul drept este minimă cînd cele două pătrate iau cea mai mică valoare, deci sînt simultan nule. Rezultă $f(a, b) \geqslant 2$. Minimul este atins pentru $a = b$.

8. *Soluția 1.* Inegalitatea se mai poate scrie $(x + 1)(y + 1) \geqslant 9xy$. Din $x + y = 1$ rezultă $y = 1 - x$, deci $(x + 1)(2 - x) \geqslant 9x(1 - x)$. Efectuînd calculele obținem $(2x - 1)^2 \geqslant 0$.

Egalitate avem dacă $x = y = \frac{1}{2}$.

Soluția 2. Avem $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$.

Dar $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x + y}{2}$, deci $\sqrt{xy} \leqslant \frac{1}{2}$, de unde $\frac{1}{xy} \geqslant 4$. Pe de altă parte:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \geqslant 4.$$

Avem, deci, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 1 + 4 + 4 = 9$.

Metoda a doua deschide perspectiva pentru demonstrarea unor inegalități mai generale. De exemplu, dacă $x + y + z = 1$, numerele x, y, z fiind numere strict pozitive, atunci:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

9. Se aplică rezultatul de la problema comentată nr. 11.

10. a) Avem $a = \sqrt{b^2 + c^2} \geqslant \sqrt{2bc} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{bc}$ și $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$. Atunci:

$$\frac{ap}{bc} = \frac{a \cdot \left(\frac{a + b + c}{2}\right)}{bc} \geqslant \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{bc}\left(\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{bc} + 2\sqrt{bc}}{2}\right)}{bc} = \frac{2bc + 2\sqrt{2}\,bc}{2bc} = \sqrt{2} + 1.$$

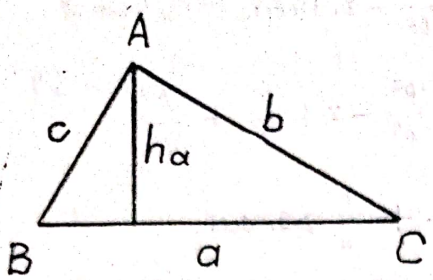
Egalitate obținem dacă $b = c$, deci în cazul triunghiului dreptunghic isoscel.

b) Avem $a = \sqrt{b^2 + c^2} \geqslant \sqrt{2bc} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{bc}$; $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$; $\mathcal{S} = \frac{bc}{2}$. Rezultă:

$$\frac{a(b + c)}{\mathcal{S}} = \frac{a(b + c)}{\frac{bc}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{bc}}{\frac{bc}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\,bc}{\frac{bc}{2}} = 4\sqrt{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem egalitate pentru triunghiul dreptunghic isoscel.



c) Scriem aria triunghiului ABC în două feluri:

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2},$$

$$\mathcal{S}_{ABC} = \frac{bc}{2}.$$

Rezultă $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot c}{2}$ de unde obținem $h_a = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Ținînd cont de faptul că $\sqrt{b^2 + c^2} \geqslant \sqrt{2bc} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{bc}$ și $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$, vom avea:

$$\frac{h_a}{p} = \frac{\frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}}{\frac{a + b + c}{2}} = \frac{2bc}{\sqrt{b^2 + c^2}(\sqrt{b^2 + c^2} + b + c)} \leqslant \frac{2bc}{\sqrt{2bc}(\sqrt{2bc} + 2\sqrt{bc})} =$$

$$= \frac{2bc}{2bc + 2\sqrt{2}\,bc} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{4}{4\sqrt{2} + 4} < \frac{4}{5 + 4} = \frac{4}{9}.$$

11. Notăm:

$$b^2 + c^2 = x,\ c^2 + a^2 = y,\ a^2 + b^2 = z. \tag{1}$$

Adunînd relațiile, obținem:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{x + y + z}{2}. \tag{2}$$

Scăzînd din (2), pe rînd, relațiile (1), obținem:

$$a^2 = \frac{y + z - x}{2},\ b^2 = \frac{x + z - y}{2},\ c^2 = \frac{x + y - z}{2}.$$

și inegalitatea devine:

$$\frac{y + z - x}{2x} + \frac{x + z - y}{2y} + \frac{x + y - z}{2z} \geqslant \frac{3}{2},$$

sau:

$$\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geqslant 3.$$

Deci:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geqslant 6.$$

Cum x, y, z sînt numere strict pozitive, putem aplica inegalitatea mediilor și deci fiecare paranteză este mai mare decît 2. Egalitate obținem cînd $x = y = z$, deci cînd $a^2 = b^2 = c^2$.

12. Notăm $a + b + c + d = S$, etc.

13. Notăm $m = \min\{a, b, c, d\}$. Vom avea $m \leqslant a$, $m \leqslant b$, $m \leqslant c$, $m \leqslant d$ și, prin înmulțire membru cu membru, obținem $m^4 \leqslant abcd$ sau $m^2 \leqslant \sqrt{abcd}$. Deoarece patrulaterul este inscriptibil avem relația lui PTOLEMEU $ac + bd = ef$. Din inegalitatea mediilor, rezultă $ac + bd \geqslant 2\sqrt{abcd}$.

Din relațiile de mai sus, vom avea, cu necesitate, $m^2 \leqslant \frac{ef}{2}$ sau $m \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{ef}$ și deci

$$\min\{a, b, c, d\} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{ef}.$$

Egalitate obținem pentru pătrat.

Scanned with OKEN Scanner

14. Avînd în vedere simetria relației putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Atunci $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}>0$ și $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b}>0$. Cum a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi avem $a+b>c$. Cu atît mai mult vom avea $a+2\sqrt{ab}+b>c$, adică $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{c})^2$. De aici rezultă că $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$. Notînd $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}=x$, $\sqrt{a}+\sqrt{c}-\sqrt{b}=y$ și $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}=z$ obținem un sistem din care exprimăm numerele $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ în funcție de numerele pozitive x, y, z. Obținem:

$$\sqrt{a}=\frac{y+z}{2},\quad \sqrt{b}=\frac{x+z}{2},\quad \sqrt{c}=\frac{x+y}{2}$$

deci inegalitatea devine:

$$\frac{\frac{y+z}{2}}{x}+\frac{\frac{x+z}{2}}{y}+\frac{\frac{x+y}{2}}{z}\geqslant 3,$$

sau:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\right]\geqslant 3$$

și ultima inegalitate rezultă, evident, din inegalitatea mediilor. Stabiliți cînd se obține egalitatea.

15. Să observăm că $\mathcal{S}_{ABC}=\mathcal{S}_{BPC}+\mathcal{S}_{CPA}+\mathcal{S}_{APB}$, adică:

$$2\mathcal{S}_{ABC}=BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF.$$

Comparînd suma dată cu membrul drept al acestei egalități sîntem conduși la ideea de a face produsul lor:

$$\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)\cdot(BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF)=$$

$$=BC^2+AC^2+AB^2+AC\cdot BC\left(\frac{PD}{PE}+\frac{PE}{PD}\right)+$$

$$+AC\cdot AB\left(\frac{PF}{PE}+\frac{PE}{PF}\right)+AB\cdot BC\left(\frac{PD}{PF}+\frac{PF}{PD}\right).$$

Dar, aplicînd inegalitatea mediilor fiecărei paranteze, obținem:

$$\left(\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\right)\cdot(BC\cdot PD+CA\cdot PE+AB\cdot PF)\geqslant$$

$$\geqslant BC^2+AC^2+AB^2+2AC\cdot BC+2AC\cdot AB+2AB\cdot BC=(AB+BC+CA)^2.$$

De aici:

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\geqslant\frac{(AB+BC+CA)^2}{2\mathcal{S}_{ABC}}=\text{constant}.$$

Minimul sumei cerute este, deci, $\frac{(AB+BC+CA)^2}{2\mathcal{S}_{ABC}}$ și acest minim se atinge, conform inegalității mediilor, cînd termenii fiecăreia dintre cele trei paranteze sînt egali adică:

$$\frac{PD}{PE}=\frac{PE}{PD},\quad \frac{PF}{PE}=\frac{PE}{PF},\quad \frac{PD}{PF}=\frac{PF}{PD},$$

deci cînd $PD=PE=PF$.

Dar există un singur punct interior unui triunghi egal depărtat de laturile acestuia. Prin urmare, punctul P este centrul cercului înscris în triunghi.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME DE ORDONARE

Pentru abordarea problemelor din acest capitol este bine să reţinem următoarele:

1) Dacă a şi b sînt două numere reale atunci este adevărată una şi numai una din relaţiile:

$$a > b,\ a = b,\ a < b.$$

Dacă numărul real a este mai mic sau egal cu numărul real b scriem $a \leqslant b$.

2) Prin $\max(a, b)$ înţelegem cel mai mare dintre numerele a şi b, iar prin $\min(a, b)$ cel mai mic dintre numerele a şi b, adică:

$$\max(a, b) = \begin{cases} a & \text{dacă } a > b \\ a \text{ sau } b & \text{dacă } a = b \\ b & \text{dacă } a < b \end{cases}; \quad \max(a, b) = \frac{a + b + |a-b|}{2};$$

$$\min(a, b) = \begin{cases} b & \text{dacă } a > b \\ a \text{ sau } b & \text{dacă } a = b \\ a & \text{dacă } a < b \end{cases}; \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a-b|}{2}.$$

3) Vom admite că oricare ar fi numerele a şi b, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, există un singur număr real c astfel încît $a^c = b$. De asemenea, vom admite că dacă $a > 1$ atunci din $a^{x_1} > a^{x_2}$ rezultă $x_1 > x_2$ şi reciproc. Dacă $a < 1$ atunci din $a^{x_1} > a^{x_2}$ rezultă $x_1 < x_2$ şi reciproc.

4) Pentru a stabili care dintre numerele a şi b este mai mare, cînd acest fapt nu este evident, putem folosi mai multe procedee:

a) Stabilim semnul diferenţei $a-b$.

Dacă $a - b > 0$, atunci $a > b$; dacă $a - b = 0$, atunci $a = b$; dacă $a - b < 0$, rezultă $a < b$.

b) În cazul în care numerele sînt pozitive şi $b \neq 0$, comparăm raportul $\frac{a}{b}$ cu 1.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\frac{a}{b} \rhd 1$, rezultă $a > b$; dacă $\frac{a}{b} = 1$, rezultă $a = b$; dacă $\frac{a}{b} \lhd 1$, atunci $a < b$.

c) În anumite cazuri, este suficient să demonstrăm existența unui număr c care să se afle între a și b sau b și a. De exemplu, din $a < c < b$ rezultă $a \lhd b$.

PROBLEME COMENTATE

1. Să se scrie în ordine crescătoare numerele 3^{3^3}, 3^{33}, 333, 33^3, $(3^3)^3$.

Soluție. Avem:

$$3^{33} \rhd 3^{27} = 3^{3^3} = (3^9)^3 \rhd (3^4)^3 = 81^3 \rhd 33^3 \rhd 27^3 = (3^3)^3 > (3^2)^3 = 9^3 = 729 \rhd 333.$$

Deci:

$$333 \lhd (3^3)^3 \lhd (33)^3 < 3^{3^3} < 3^{33}.$$

Comentarii. 1). Observăm că, în general, $(a^b)^c \neq a^{b^c}$. De exemplu, $(5^3)^2 = 5^6$ și $5^{3^2} = 5^9$.

2). Tripletele care verifică egalitatea $(a^b)^c = a^{b^c}$ sînt de forma: $(1, b, c)$, $(a, b, 1)$, $(a, 2, 2)$

Notă: Pentru alte detalii, a se vedea exemplul nr. 7, pg. 48.

2. Să se determine:

a) $\max(2^{237}, 3^{158})$; b) $\max\left(\frac{1}{4^{36}}, \frac{1}{9^{24}}\right)$; c) $\min(2^{76}, 3^{51})$.

Soluție. a) Acest tip de probleme se rezolvă, în general, pornind de la observația că $2^3 < 3^2$ $(8 \lhd 9)$. Avem:

$$2^{237} = 2^{3 \cdot 79} = (2^3)^{79}; \quad 3^{158} = 3^{2 \cdot 79} = (3^2)^{79}.$$

Dintre două puteri cu baze numere naturale și cu exponenți numere naturale egale este mai mare cea care are baza mai mare, deci $\max(2^{237}, 3^{158}) = 3^{158}$.

b) Avem $4^{36} = 2^{2 \cdot 36} = 2^{3 \cdot 24} = (2^3)^{24}$; $9^{24} = 3^{2 \cdot 24} = (3^2)^{24}$.

Dintre două fracții cu același numărător este mai mare cea care are numitorul mai mic, deci $\max\left(\frac{1}{4^{36}}, \frac{1}{9^{24}}\right) = \frac{1}{4^{36}}$.

c) Avem $2^{76} = 2^{1+75} = 2 \cdot 2^{75} = 2 \cdot 2^{3 \cdot 25} = 2 \cdot (2^3)^{25}$; $3^{51} = 3^{1+50} = 3 \cdot 3^{50} = 3 \cdot 3^{2 \cdot 25} = 3 \cdot (3^2)^{25}$

Avem $(2^3)^{25} < (3^2)^{25}$ și, cu atît mai mult, $2 \cdot (2^3)^{25} < 3 \cdot (3^2)^{25}$, deci $\min(2^{76}, 3^{51}) = 2^{76}$.

Comentariu. Oricare ar fi numărul natural n, nenul, are loc $2^{3n} < 3^{2n}$.

3. Care dintre numerele:

$$a = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1\,000^{1000}; \quad b = 2^{2^{2^2}}$$

este mai mare? (a și b sînt scrise în sistemul zecimal).

Soluție. Avem:

$$b = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}.$$

Dar:

$$2^{16} = 2^{10+6} = 2^{10} \cdot 2^6 = 1\,024 \cdot 64 > 64 \cdot 1\,000 = 64\,000.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $b > 2^{64\,000}$. Pe de altă parte:

$$a = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 1\,000^{1\,000} < \underbrace{1\,000^{1\,000} + 1\,000^{1\,000} + \ldots + 1\,000^{1\,000}}_{\text{de } 1\,000 \text{ de ori}} =$$

$$= 1\,000 \cdot 1\,000^{1\,000} = 1\,000^{1\,001} < (1\,024)^{1\,001} = (2^{10})^{1\,001} = 2^{10\,010}.$$

Din $a < 2^{10\,010}$ și $b > 2^{64\,000}$ rezultă $a < b$.

Comentariu. Nu am comparat direct numerele a și b. Am arătat că există două numere c și d care îndeplinesc condițiile:

$$a < c, \; c < d, \; d < b.$$

De aici ordinea $a < c < d < b$. Era suficient ca între a și b să se găsească un singur număr pentru ca ordinea dintre ele să fie stabilită.

4. Să se arate că:

$$\frac{100^{100}}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100)^2} < 1.$$

Soluție. Dacă $a = 100^{100}$, iar $b = (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 100)^2$, va trebui să arătăm că $a < b$. Numărul b îl putem scrie astfel:

$$b = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot (100 - k + 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= (1 \cdot 100) \cdot (2 \cdot 99) \cdot (3 \cdot 98) \cdot \ldots \cdot [k(100 - k + 1)] \cdot \ldots \cdot (98 \cdot 3) \cdot (99 \cdot 2) \cdot (100 \cdot 1).$$

În acest produs de 100 de factori, k este un număr natural cuprins între 2 și 99.

Să comparăm un factor oarecare din acest produs cu numărul 100, adică cu unul dintre cei 100 de factori egali ai lui a. Pentru aceasta studiem semnul diferenței $k(100 - k + 1) - 100$:

$$k(100 - k + 1) - 100 = 100k - k(k-1) - 100 = 100(k-1) - k(k-1) =$$

$$= (100 - k)(k - 1).$$

Din $k \geq 2$ rezultă $k - 1 > 0$, iar din $k \leq 99$ rezultă $100 - k > 0$, deci $(100 - k)(k - 1) > 0$, adică $k(100 - k + 1) > 100$. Am ajuns la concluzia că, începînd cu al doilea factor al lui b, pînă la al 99-lea, toți sînt mai mari decît 100, deci $100^{100} < (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100)^2$.

Comentarii. 1). Produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ se notează cu $n!$ și se citește „n factorial".

2). În rezolvarea problemei am folosit următoarea proprietate:

Dacă $a \geq b$ și $c > d$ rezultă că $a \cdot c > b \cdot d$, cu $a, b, c, d,$ pozitive.

3). Problema propusă se poate generaliza astfel:

Să se demonstreze că $(n!)^2 > n^n$ pentru orice n număr natural strict mai mare ca 2.

Demonstrație. Putem scrie:

$$a = (n!)^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot$$

$$\cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= [1 \cdot n] \cdot [2(n-1)] \cdot [3(n-2)] \cdot \ldots \cdot [k(n - k + 1)] \cdot \ldots \cdot [(n-2) \cdot 3] \cdot [(n-1) \cdot 2] \cdot [n \cdot 1];$$

$$b = n^n = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{de } n \text{ ori}}.$$

Scrise astfel, numerele a și b au cîte n factori. Să comparăm un factor oarecare din primul produs cu un factor oarecare al celui de-al doilea produs:

$$k(n - k + 1) - n = kn - k(k-1) - n = n(k-1) - k(k-1) = (k-1)(n-k).$$

Cum $k \geqslant 2$, rezultă $k-1>0$ și din $k \leqslant n-1$ rezultă $n-k>0$, deci $(k-1)(n-k)>0$. Am demonstrat că a este format din factori mai mari sau cel puțin egali cu ai lui b (primul și ultimul factor ai lui a sînt egali cu orice factor al lui b, în rest inegalitatea este strictă), deci $a>b$.

4). Deoarece $(n!)^2>n^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}-\{0,1,2\}$ rezultă că dacă ecuația $(n!)^2=n^n$ are soluții în $\mathbb{N}$ atunci acestea se găsesc printre elementele mulțimii $\{0,1,2\}$. Verifică ecuația numai $n=1$ și $n=2$. Deci soluțiile ecuației $(n!)^2=n^n$ în numere naturale sînt $n=1$ și $n=2$.

5). Observînd în cazul particular dat că $100^{100}=(100^{50})^2$, problema revenea la a arăta că $100^{50}<100!$.

5. Să se decidă dacă numărul $\dfrac{99^{99}+100^{100}}{99^{100}+100^{99}}$ este subunitar, echiunitar sau supraunitar.

Soluție. Scoatem factor pe 100^{99} și avem:

$$\frac{99^{99}+100^{100}}{99^{100}+100^{99}}=\frac{99^{99}+100^{99}\cdot 100}{99^{99}\cdot 99+100^{99}}=\frac{100^{99}\left[\left(\frac{99}{100}\right)^{99}+100\right]}{100^{99}\left[\left(\frac{99}{100}\right)^{99}\cdot 99+1\right]}=\frac{\left(\frac{99}{100}\right)^{99}+99+1}{\left(\frac{99}{100}\right)^{99}\cdot 99+1}.$$

Orice putere naturală a unui număr subunitar este un număr subunitar. Produsul dintre un număr pozitiv x și un număr pozitiv subunitar y este mai mic decît x. În cazul nostru, $\dfrac{99}{100}<1$, deci $\left(\dfrac{99}{100}\right)^{99}<1$ și $\left(\dfrac{99}{100}\right)^{99}\cdot 99<99$.

Rezultă că numărătorul este mai mare decît numitorul, deci fracția este supraunitară. Să studiem semnul diferenței dintre numărător și numitor. Avem:

$$99^{99}+100^{100}-99^{100}-100^{99}=(100^{100}-100^{99})-(99^{100}-99^{99})=$$

$$=(100\cdot 100^{99}-100^{99})-(99\cdot 99^{99}-99^{99})=99\cdot 100^{99}-98\cdot 99^{99}.$$

Dacă a, b, c, d sînt numere pozitive și dacă $a>b$ și $c>d$, atunci $ac>bd$ deci, în cazul nostru, $99\cdot 100^{99}-98\cdot 99^{99}>0$, adică numărătorul este mai mare decît numitorul.

Comentariu. O generalizare a acestei probleme poate fi următoarea:

Să se demonstreze că pentru orice număr natural n nenul este adevărată inegalitatea:

$$\frac{n^n+(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}+(n+1)^n}>1.$$

Demonstrație. Membrul sting al inegalității se mai scrie:

$$\frac{n^n+(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}+(n+1)^n}=\frac{n^n+(n+1)^n\cdot(n+1)}{n^n\cdot n+(n+1)^n}=\frac{(n+1)^n\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n+n+1\right]}{(n+1)^n\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot n+1\right]}.$$

Cum $\dfrac{n}{n+1}<1$, rezultă $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n<1$ și $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\cdot n<n$, și:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot n+1<n+1<\left(\frac{n}{n+1}\right)^n+n+1.$$

Deci :

$$\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n + n + 1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot n + 1} = \frac{n^n + (n+1)^{n+1}}{n^{n+1} + (n+1)^n} > 1.$$

6. Știind că există numerele reale pozitive a și b astfel încît $2^a = 3$ și $3^b = 4$, să se stabilească care dintre acestea este mai mare.

Soluție. Din $2^a = 3 > 2$ rezultă $a > 1$. Presupunem că $b \geqslant a$; deci $4 = 3^b \geqslant 3^a$ adică $4 \geqslant 3^a$. Avem $\frac{4}{3} = \frac{3^b}{2^a} \geqslant \frac{3^a}{2^a} = \left(\frac{3}{2}\right)^a > \frac{3}{2}$ pentru că $a > 1$. Am ajuns la concluzia $\frac{4}{3} > \frac{3}{2}$, $8 > 9$, ceea ce este absurd. Rămîne că $b < a$.

Comentariu. Dacă am fi încercat să aflăm direct numerele a și b nu am fi reușit ușor. Se poate demonstra că aceste numere există. Ele sînt numere iraționale, deci numere care au o infinitate de zecimale ce nu se succed periodic. Să demonstrăm, de exemplu, că dacă există numărul a, astfel încît $2^a = 3$, atunci a este irațional. Vom demonstra prin reducere la absurd : presupunem că a este un număr rațional, adică $a = \frac{m}{n}$, cu m și n numere naturale, $n \neq 0$ și $(m, n)_* = 1$.

Avem $2^{\frac{m}{n}} = 3$; ridicăm ambii membri ai egalității la puterea a n-a și obținem $\left(2^{\frac{m}{n}}\right)^n = 3^n$. De aici, rezultă $2^m = 3^n$. Dar această egalitate este imposibilă, pentru că 2^m este număr par, iar 3^n este număr impar.

7. Se dau trei numere întregi și pozitive x_1, x_2, x_3 care satisfac relațiile :

$$x_1 x_2 x_3 > 1 \; ; \; x_1 + x_2 + x_3 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

Să se demonstreze că :

a) nici unul dintre aceste numere nu este egal cu 1;

b) unul și numai unul dintre aceste numere este mai mic decît 1.

Soluție. a). Presupunem că $x_3 = 1$. În acest caz, $x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 > 1$ și $x_1 + x_2 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ sau $x_1 + x_2 < \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$. Deoarece $x_1 + x_2 > 0$, rezultă $x_1 x_2 < 1$, ceea ce, conform cu relația $x_1 x_2 > 1$, este imposibil.

b) 1. Dacă $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 > 1$ rezultă că :

$$x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

ceea ce contrazice ipoteza.

2. Fie $x_3 < 1$. Cum $x_1 x_2 x_3 > 1$ și $x_3 < 1$ rezultă $x_1 x_2 > 1$ deci $1 - x_1 x_2 < 0$. Din $x_1 x_2 x_3 > 1$ obținem $\frac{1}{x_3} < x_1 x_2$ și $\frac{1}{x_1 x_2} < x_3$. Rezultă :

$$\frac{1}{x_1 x_2} + x_1 + x_2 < x_1 + x_2 + x_3 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1 x_2,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci:

$$\frac{1}{x_1x_2} + x_1 + x_2 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + x_1x_2$$

sau, prin eliminarea numitorilor:

$$1 + (x_1 + x_2) \cdot x_1x_2 < x_1 + x_2 + (x_1x_2)^2,$$

deci:

$$(1 - x_1x_2)(1 + x_1x_2) - (x_1 + x_2)(1 - x_1x_2) < 0.$$

Împărțind prin $1 - x_1x_2$, care este negativ, avem:

$$1 + x_1x_2 - x_1 - x_2 > 0, \quad (1 - x_1)(1 - x_2) > 0$$

deci $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ (dacă $x_1 < 1$ și $x_2 < 1$ rezultă $x_1x_1x_3 < 1$ ceea ce este o contradicție), ceea ce trebuia demonstrat.

Comentariu. Negația propoziției „nici unul nu este egal cu 1" este „cel puțin unul este egal cu 1".

Se observă, din modul de rezolvare, eficiența reducerii la absurd în astfel de probleme.

8. Se dau 5 segmente cu proprietatea că oricare 3 pot fi lungimile laturilor unui triunghi. Să se arate că există, printre aceste 5 segmente, 3 cu care se poate forma un triunghi ascuțitunghic.

Soluție. Fie $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$ cu proprietatea că $a_i - a_j < a_k < a_i + a_j$, $(\forall)$ $k, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $k \neq i \neq j \neq k$. Presupunem, prin absurd, că nici un triunghi nu este ascuțitunghic, ceea ce revine la:

$$a_5^2 \geqslant a_4^2 + a_3^2; \quad a_4^2 \geqslant a_3^2 + a_2^2; \quad a_3^2 \geqslant a_2^2 + a_1^2.$$

Prin însumare, obținem:

$$a_5^2 \geqslant a_1^2 + 2a_2^2 + a_3^2$$

și, cum $a_3^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2$, rezultă:

$$a_5^2 \geqslant 2a_1^2 + 3a_2^2 = (a_1 + a_2)^2 + a_1^2 + 2a_2^2 - 2a_1a_2 > (a_1 + a_2)^2 + 2a_2(a_2 - a_1) \geqslant (a_1 + a_2)^2.$$

Deci $a_5^2 > (a_1 + a_2)^2$, de unde rezultă $a_5 > a_1 + a_2$, ceea ce contrazice posibilitatea formării unui triunghi în care laturile au lungimile a_1, a_2, a_5.

Comentariu. Condițiile ca triunghiul cu lungimile laturilor a, b, c să fie ascuțitunghic sînt:

$$a^2 < b^2 + c^2; \quad b^2 < c^2 + a^2; \quad c^2 < a^2 + b^2.$$

Aceasta rezultă, de exemplu, din teorema cosinusurilor:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Cum $\cos A > 0$, pentru $m(\hat{A}) < 90°$, avem $a^2 < b^2 + c^2$ și analoagele. Dacă triunghiul este dreptunghic în A avem $a^2 = b^2 + c^2$, iar dacă unghiul $\hat{A}$ este obtuz avem $a^2 > b^2 + c^2$.

9. Să se afle $\max\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}, \sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)$.

Soluție. Notăm $a = \sqrt{2}^{\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ și obținem:

$$a^2 = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^2 = \sqrt{2}^{2\sqrt{3}} = (\sqrt{2}^2)^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$(a^2)^{\sqrt{2}} = (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{6}} < 2^3 = 8; \qquad (*)$$

$$b^2 = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt{3}^{2\sqrt{2}} = (\sqrt{3}^2)^{\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{2}},$$

$$(b^2)^{\sqrt{2}} = (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^2 = 9. \qquad (**)$$

Comparînd (*) cu (**) rezultă $a < b$, deci $\max\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}, \sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$.

Comentariu. În rezolvarea acestei probleme am admis că operațiile cu puteri, cu baza și exponenți numere reale pozitive, se fac după aceleași reguli ca în cazul puterilor cu baze și exponenți numere naturale, adică :

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}; \quad a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1-x_2}; \quad (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}.$$

Se poate demonstra că aceste reguli sînt valabile pentru orice a număr real strict pozitiv și pentru orice numere reale x_1 și x_2.

10. Să se determine $\max(a\sqrt{|a|}, a^2)$, cînd $a \in \mathbb{R}$ ($|a|$ reprezintă valoarea absolută a numărului real a).

Soluție. Dacă $a \in \mathbb{R}$, avem $|a| \geqslant 0$ și deci numărul $\sqrt{|a|}$ este definit. Vom distinge următoarele situații :

I. $a < 0$. Avem $a\sqrt{|a|} < 0$ și $a^2 > 0$, deci $\max(a\sqrt{|a|}, a^2) = a^2$.

II. $a = 0$. Avem $\max(a\sqrt{|a|}, a^2) = 0$.

III. $a \in (0, 1)$; Avem $a\sqrt{|a|} = \sqrt{a^2} \cdot a = \sqrt{a^3}$, iar $a^2 = \sqrt{a^4}$. Pentru că $a \in (0, 1)$ avem $a^3 > a^4$ și deci $a\sqrt{|a|} > a^2$ de unde $\max(a\sqrt{|a|}, a^2) = a\sqrt{|a|}$.

IV. $a = 1$. Avem $\max(a\sqrt{|a|}, a^2) = 1$.

V. $a \in (1, +\infty)$. Avem $a^3 < a^4$, deci $a\sqrt{|a|} < a^2$, de unde $\max(a\sqrt{|a|}, a^2) = a^2$.

În concluzie :

$$\max(a\sqrt{|a|}, a^2) = \begin{cases} a^2, & \text{dacă } a \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), \\ a\sqrt{|a|}, & \text{dacă } a \in (0, 1). \end{cases}$$

Comentariu. Numărul $\sqrt{a}$ ($a \geqslant 0$) este pozitiv. La introducerea unui factor sub radical este necesar să se aibă în vedere semnul acestuia.

De exemplu: $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; $-3\sqrt{2} = -\sqrt{(-3)^2 \cdot 2} = -\sqrt{18}$; $x\sqrt{x} = \sqrt{x^3 \cdot x} = \sqrt{x^3}$ (pentru că $\sqrt{x}$ este definit numai pentru $x \geqslant 0$), $x\sqrt{|x|} = \begin{cases} -\sqrt{x^2 \cdot |x|}, & \text{dacă } x < 0; \\ \sqrt{x^2 \cdot |x|}, & \text{dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$

11. Să se ordoneze numerele $1, 2, x, x^2$ cînd x parcurge mulțimea numerelor reale.

Soluție. Considerăm funcțiile $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, date prin $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 2$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = x^2$. Le reprezentăm grafic în același sistem de axe perpendiculare.

Funcțiile sînt ușor de recunoscut : primele două sînt funcții constante, a treia va fi reprezentată prin prima bisectoare a axelor, iar a patra este o parabolă.

Scanned with OKEN Scanner

Graficele funcţiilor f_1 şi f_2 evident nu se intersectează (sînt drepte paralele). Pentru a afla intersecţia dintre graficele funcţiilor f_1 şi f_3 rezolvăm sistemul:

$\begin{cases} y = 1 \\ y = x \end{cases}$, cu soluţia $(1, 1)$. Analog: $\begin{cases} y = 2 \\ y = x \end{cases}$, cu soluţia $(2, 2)$; $\begin{cases} y = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$ cu soluţiile $(-1, 1)$ şi $(1, 1)$; $\begin{cases} y = 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ cu soluţiile $(-\sqrt{2}, 2)$ şi $(\sqrt{2}, 2)$; $\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$ cu soluţiile $(0, 0)$, $(1, 1)$.

În punctul $x_0 \in \mathbb{R}$, ordinea numerelor $1, 2, x, x^2$ este dată de ordinea dintre $f_1(x_0)$, $f_2(x_0)$, $f_3(x_0)$, $f_4(x_0)$. Distingem următoarele situaţii:

I. Pentru $x \in (-\infty, -\sqrt{2}]$, obţinem:

$$x < 1 < 2 \leqslant x^2;$$

II. Pentru $x \in (-\sqrt{2}, -1]$, avem:

$$x < 1 \leqslant x^2 < 2;$$

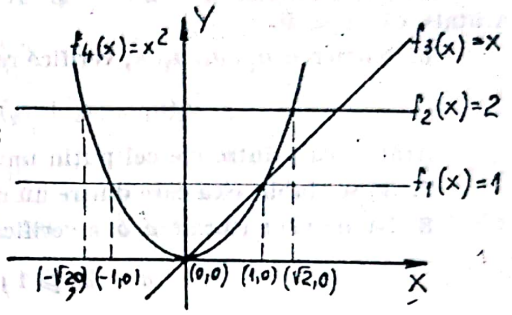
III. Pentru $x \in (-1, 0]$, avem $x \leqslant x^2 < 1 < 2$;

IV. Pentru $x \in (0, 1]$, avem $x^2 \leqslant x \leqslant 1 < 2$;

V. Pentru $x \in (1, \sqrt{2}]$, avem $1 < x < x^2 \leqslant 2$;

VI. Pentru $x \in (\sqrt{2}, 2]$, avem $1 < x \leqslant 2 < x^2$;

VII. Pentru $x \in (2, +\infty)$, avem $1 < 2 < x < x^2$.



Comentariu. Se putea da o soluţie directă. Am folosit suportul intuitiv pentru a stabili mai rapid ordinea. În general, intuiţia nu se poate substitui demonstraţiei riguroase.

12. Numerele reale a_1, a_2, a_3, a_4 verifică inegalităţile:

$$a_1 - 3a_2 + 2a_3 \geqslant 0;\ a_2 - 3a_3 + 2a_4 \geqslant 0;$$

$$a_3 - 3a_4 + 2a_1 \geqslant 0;\ a_4 - 3a_1 + 2a_2 \geqslant 0.$$

Demonstraţi că numerele date sînt egale.

Soluţie. Adunînd relaţiile membru cu membru obţinem $0 \geqslant 0$. Cum nici una dintre inegalităţile date nu sînt stricte rezultă că toate sînt egalităţi, adică:

$$a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0;\ a_2 - 3a_3 + 2a_4 = 0;\ a_3 - 3a_4 + 2a_1 = 0;\ a_4 - 3a_1 + 2a_2 = 0.$$

Acestea se mai pot scrie astfel:

$$a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3);\ a_2 - a_3 = 2(a_3 - a_4);\ a_3 - a_4 = 2(a_4 - a_1);\ a_4 - a_1 = 2(a_1 - a_2).$$

Avem, deci:

$$a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3) = 2^2(a_3 - a_4) = 2^3(a_4 - a_1) = 2^4(a_1 - a_2).$$

Din $a_1 - a_2 = 2^4(a_1 - a_2)$, rezultă $(2^4 - 1)(a_1 - a_2) = 0$, deci $a_1 - a_2 = 0$, $a_1 = a_2$ şi, analog, $a_2 = a_3$, $a_3 = a_4$, deci $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Comentarii. 1). Esenţială a fost observaţia: dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ şi $a + b = 0$ rezultă, $a = b = 0$. În mulţimea numerelor reale, o sumă de numere nenegative este egală cu 0 dacă şi numai dacă fiecare termen al sumei este egal cu 0.

2). Dacă cel puţin una dintre inegalităţile date era strictă, atunci, prin adunare membru cu membru, obţineam $0 > 0$, ceea ce duce la concluzia că nu există numere care să verifice relaţiile date.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PROPUSE

1. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, pot fi fracțiile $\frac{a}{c}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}$ simultan subunitare?

2. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

$$9^{99}, (9^9)^9, 9^{9^9}, 999, 99^9.$$

3. Care dintre numerele 124^{100} și 26^{150} este mai mare?

4. Determinați cea mai mică valoare a lui n, număr natural, astfel încît $37^n > 215^{15}$.

5. Fie numerele $A = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}$ și $B = 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^3}}}}$, unde A are 100 de 2, iar B, 99 de 3. Arătați că $A < B$.

6. Numerele a_1, a_2, a_3, a_4 verifică relațiile:

$$a_2(a_1 - a_2 + a_3) < 0; \quad a_3(a_2 - a_3 + a_4) < 0.$$

Arătați că printre ele cel puțin unul este negativ și cel puțin unul este pozitiv.

7. Să se stabilească care dintre numerele 145^{23} și $(23!)^2$ este mai mare.

8. Numerele naturale a, b, c verifică inegalitățile:

$$a - 2c \geqslant 1; \quad b - c \leqslant 1; \quad 2b - a \geqslant 1.$$

Stabiliți ordinea dintre ele.

9. Să se ordoneze numerele $4, -x, x^2$ cînd x parcurge $\mathbb{R}$.

10. Să se determine (justificînd răspunsul) cel mai mare număr ce poate fi scris ca un produs de numere întregi pozitive a căror sumă este 2 000.

SOLUȚII, INDICAȚII SAU RĂSPUNSURI

1. *Metoda I.* Dacă toate numerele ar fi subunitare am avea $a < c$, $c < b$, $b < a$. Dar, din primele două inegalități, rezultă $a < b$ deci contradicție.

Metoda a II-a. Dacă toate numerele sînt subunitare atunci $1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} < 1$, $1 < 1$, ceea ce este o contradicție.

2. Avem ordinea $999 < 99^9 < (9^9)^9 < 9^{99} < 9^{9^9}$.

3. Avem ordinea $26^{150} > 124^{100}$;

4. $n = 15$;

5. Avem $16 = 2^{2^2} < 3^3 = 27$. Din $2^{2^2} < 3^3$ și $2 < 3$ rezultă $2^{2^{2^2}} < 3^{3^3}$ etc.

6. Presupunem că toate numerele sînt pozitive. Rezultă:

$$a_1 - a_2 + a_3 < 0; \quad a_2 - a_3 + a_4 < 0$$

și, prin însumarea, membru cu membru, a celor două inegalități, obținem $a_1 + a_4 < 0$, ceea ce este o contradicție.

Analog se demonstrează că cel puțin unul dintre numerele date este pozitiv.

7. Avem

$$(23!)^2 = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23) =$$
$$= (1 \cdot 23) \cdot (2 \cdot 22) \cdot (3 \cdot 21) \cdot \ldots \cdot (11 \cdot 13) \cdot (12 \cdot 12) \cdot \ldots \cdot (21 \cdot 3) \cdot (22 \cdot 2) \cdot (23 \cdot 1).$$

Să observăm că suma factorilor din fiecare paranteză este aceeași: 24.

În problema 9 de la capitolul „*Medii*" am demonstrat că dacă suma a două numere strict pozitive este constantă, produsul acestora este maxim cînd numerele sînt egale. Avem, deci:

$$(23!)^2 < (12 \cdot 12)^{23} = 144^{23} < 145^{23}.$$

Rezultă $(23!)^2 < 145^{23}$.

Generalizare. Folosind scrierea de mai sus, punînd n în locul lui 23, obținem:

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot [2(n-1)] \cdot \ldots \cdot [k(n-k+1)] \cdot \ldots \cdot (n \cdot 1).$$

Suma factorilor din fiecare paranteză este $n+1$, deci constantă. Produsul este maxim cînd factorii sînt egali, ceea ce revine la $k = n-k+1$, de unde $2k = n+1$, deci:

$$k = \frac{n+1}{2}.$$

De aici rezultă inegalitatea mai generală:

$$(n!)^2 \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}, \; n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}.$$

8. Înmulțind a doua inegalitate cu -2, obținem:

$$\begin{cases} a - 2c - 1 \geqslant 0; \\ 2c - 2b + 2 \geqslant 0; \\ 2b - a - 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Adunînd inegalitățile, membru cu membru, obținem $0 \geqslant 0$, deci toate inegalitățile devin egalități:

$$\begin{cases} a - 2c = 1; \\ c - b = -1; \\ 2b - a = 1. \end{cases}$$

Adunînd primele două egalități, obținem $a = b + c$, deci $a \geqslant b$, $a \geqslant c$, dar $b = c + 1$ deci $b > c$. Prin urmare, ordinea numerelor este:

$$a \geqslant b > c.$$

Se observă că $b = 1 + c$ și $a = 1 + 2c$, $c \in \mathbb{N}$. Pentru $c = 0$, obținem $a = b = 1$.

9. Distingem următoarele cazuri:

I. $x \in (-\infty, -4)$; $\quad 4 < -x < x^2$;

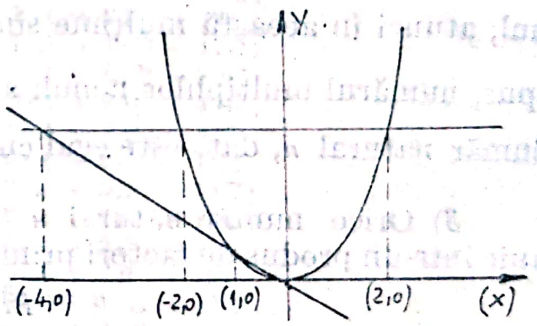
II. $x \in [-4, -2)$; $\quad -x \leqslant 4 < x^2$;

III. $x \in [-2, -1)$; $\quad -x < x^2 \leqslant 4$;

IV. $x \in [-1, 0)$; $\quad x^2 \leqslant -x < 4$;

V. $x \in [0, 2)$; $\quad -x \leqslant x^2 < 4$;

VI. $x \in [2, +\infty)$; $\quad -x < 4 \leqslant x^2$.



10. Există un număr finit de moduri în care 2 000 poate fi scris ca sumă de numere întregi pozitive, deci există un cel mai mare număr între toate produsele corespunzătoare. Să observăm că un factor m poate fi înlocuit cu doi factori egali cu 2, respectiv cu $m-2$.

Pentru ca această înlocuire să nu micșoreze produsul trebuie ca $2(m-2) \geqslant m$, deci $m \geqslant 4$. Rezultă de aici că toți factorii $m \geqslant 4$ îi vom înlocui cu factori mai mici strict decît 4, deci cu 1, 2, 3. Înlocuind pentru cuplul de factori $(1, m)$ produsul componentelor sale cu $m+1$, produsul total crește, deci maximul se atinge printre produsele ce au numai factori 2 și 3.

Cum $2^3 < 3^2$, nu vom considera decît cazurile care conțin pe 2 la puteri mai mici strict decît 3. Deci produsul maxim are una din formele:

$$3^k; \; 2 \cdot 3^p; \; 2^2 \cdot 3^q.$$

Primul caz conduce la $2\,000 = 3k$, imposibil pentru că $2\,000 = 3 \cdot 666 + 2$, al treilea caz conduce la $2\,000 = 3q + 4$ ceea ce este, de asemenea, imposibil.

Rămîne valabil cazul doi: $2\,000 = 3p + 2$. Rezultă $p = 666$ și deci produsul maxim căutat este $2 \cdot 3^{666}$.

PROBLEME DE NUMĂRARE

Există o mare varietate de probleme care se pot încadra în această temă. Am selectat cîteva dintre cele mai reprezentative. Pentru rezolvarea acestora, este necesar să reţinem următoarele :

1) Prin partea întreagă a numărului real X înţelegem cel mai mare număr întreg care nu-l depăşeşte pe X şi se notează $[X]$. Avem, deci :

$$X - 1 < [X] \leqslant X.$$

Exemple :

$$[2{,}8] = 2,\ [0{,}7] = 0,\ \left[\frac{7}{2}\right] = 3,\ \left[\frac{1}{5}\right] = 0,\ \left[\frac{36}{7}\right] = 5,$$

$$[7] = 7,\quad [-1{,}6] = -2,\quad [-0{,}43] = -1,\quad [\sqrt{2}] = 1.$$

2) Dacă se dă mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ şi un număr natural p nenul, atunci în această mulţime sînt exact $\left[\frac{n}{p}\right]$ multipli ai lui p. Altfel spus, numărul multiplilor nenuli ai numărului natural nenul p pînă la un număr natural n, dat, este egal cu $\left[\frac{n}{p}\right]$.

3) Orice număr natural n, diferit de 0, se descompune în mod unic într-un produs de factori primi, adică :

$$n = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sînt numere prime convenabile, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ numere naturale nenule.

Această reprezentare a lui n se mai numeşte şi *forma canonică* a lui n.

Numărul divizorilor naturali ai lui n este dat de produsul :

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1).$$

4) Suma primelor n numere naturale nenule este :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5) Produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ se notează cu $n!$ care se citeşte „n factorial”.

Scanned with OKEN Scanner

1. Cîte numere de cinci cifre încep și se termină cu cifra 5?

Soluție. Trebuie să aflăm cîte numere de forma $\overline{5abc5}$ există. Cifra a poate lua 10 valori: 0, 1, 2, ..., 9. Pentru o valoare fixată a lui a, b poate lua, de asemenea, 10 valori: 0, 1, 2, ..., 9. Există, deci, $10 \cdot 10 = 10^2$ posibilități de formare a lui $\overline{ab}$. Pentru fiecare din cele 10^2 posibilități, c poate lua și el 10 valori: 0, 1, 2, ..., 9. Există, deci, $10^2 \cdot 10 = 1\,000$ numere de cinci cifre care încep și se termină cu cifra 5.

Comentarii. 1). Faptul că numerele încep și se termină cu cifra 5 nu este esențial. Același rezultat îl obținem dacă se cere cîte numere de 4 cifre există știind că prima cifră este dată.

2). Ne putem întreba cîte numere naturale de n cifre există, adică numere de forma $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_3 a_2 a_1}$. Cifra a_n poate lua numai 9 valori: 1, 2, ..., 9. Oricare altă cifră a numărului poate lua 10 valori: 0, 1, 2, ..., 9. Fiecare cifră ia aceste valori indiferent de ce valori au luat celelalte. Deci, numărul numerelor de n cifre este:

$$9 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{de } n-1 \text{ ori}} = 9 \cdot 10^{n-1}.$$

3). Problema dată putea fi rezolvată și astfel: $\overline{abc}$ poate avea oricare dintre formele: 000, 001, 002, ..., 998, 999, în total, 1 000 posibilități.

2. În cîte moduri se poate schimba o bancnotă de 25 de lei cu monede de 5 lei, 3 lei și un leu?

Soluție. Pentru a ușura redactarea vom nota moneda de 5 lei cu A, cea de 3 lei cu B și cea de un leu cu C. O variantă o vom da, de exemplu, astfel: $3A + 2B + 4C$ și o vom citi: 3 monede de 5 lei, două monede de 3 lei și 4 monede de un leu.

Varianta $0 \cdot A + 6B + 7C$ reprezintă: 0 monede de 5 lei, 6 de 3 lei și 7 de un leu. Există următoarele posibilități:

1) $5A + 0 \cdot B + 0 \cdot C$;
2) $4A + 1 \cdot B + 2C$;
3) $4A + 0 \cdot B + 5C$;
4) $3A + 3B + 1 \cdot C$;
5) $3A + 2B + 4C$;
6) $3A + 1 \cdot B + 7C$;
7) $3A + 0 \cdot B + 10C$;
8) $2A + 5B + 0 \cdot C$;
9) $2A + 4B + 3C$;
10) $2A + 3B + 6C$;
11) $2A + 2B + 9C$;
12) $2A + 1 \cdot B + 12C$;
13) $2A + 0 \cdot B + 15C$;
14) $1 \cdot A + 6B + 2C$;
15) $1 \cdot A + 5B + 5C$;
16) $1 \cdot A + 4B + 8C$;
17) $1 \cdot A + 3B + 11C$;
18) $1 \cdot A + 2B + 14C$;
19) $1 \cdot A + 1 \cdot B + 17C$;
20) $1 \cdot A + 0 \cdot B + 20C$;
21) $0 \cdot A + 8B + 1 \cdot C$;
22) $0 \cdot A + 7B + 4C$;
23) $0 \cdot A + 6B + 7C$;
24) $0 \cdot A + 5B + 10C$;
25) $0 \cdot A + 4B + 13C$;
26) $0 \cdot A + 3B + 16C$;
27) $0 \cdot A + 2B + 19C$;
28) $0 \cdot A + 1 \cdot B + 22C$;
29) $0 \cdot A + 0 \cdot B + 25C$.

În concluzie, există 29 posibilități distincte de a schimba o bancnotă de 25 lei cu monede de 5 lei, 3 lei și un leu.

Comentarii. 1). Am avut, de fapt, de rezolvat ecuația $5x + 3y + 1 \cdot z = 25$ în mulțimea numerelor naturale. Evident că:

$$0 \leqslant x \leqslant 5; \quad 0 \leqslant y \leqslant 8; \quad 0 \leqslant z \leqslant 25.$$

În rezolvare am pornit de la $x = 5$.

2). Aflați în cîte moduri puteți schimba o bancnotă de 100 de lei cu bancnote de 50 de lei, 25 de lei și 10 lei.

3. Să se determine suma tuturor cifrelor numerelor naturale de la 1 la 1 000 000 000.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Dacă vom considera și numărul 0, acesta nu influențează suma cerută. Vom grupa numerele naturale de la 0 la 999 999 999 în perechi astfel : (0 ; 999 999 999) ; (1 ; 999 999 998) ; (2 ; 999 999 997) ; ... ; (K ; 999 999 999 − K) ; ... ; (499 999 999 ; 500 000 000).

Observăm că sînt exact 500 000 000 astfel de perechi. Suma cifrelor oricărei perechi este egală cu $9 \cdot 9 = 81$. Suma cifrelor tuturor perechilor este $81 \cdot 500\,000\,000 = 40\,500\,000\,000$. La acest număr trebuie adăugată și suma cifrelor numărului 1 000 000 000. Rezultă că suma cerută este 40 500 000 001.

Comentariu. Există și alte modalități de a calcula suma cerută. Soluția dată a transformat problema într-o problemă de numărare a perechilor de numere cu proprietatea că suma lor este 999 999 999.

4. Se scriu numerele naturale în ordine, începînd cu 1. Să se determine cifra de pe locul 34 788.

Soluție. Există 9 numere de o cifră, $99 - 9 = 90$ de numere de două cifre, $999 - 99 = 900$ de numere de trei cifre, $9\,999 - 999 = 9\,000$ de numere de patru cifre. Numărul cifrelor cu care sînt scrise primele 999 de numere naturale începînd cu 1 este $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2\,889$, iar numărul cifrelor cu care sînt scrise primele 9 999 numere naturale, începînd cu 1 este $2\,889 + 4 \cdot 9\,000 = 38\,889$. Rezultă de aici că numărul care conține cifra căutată este un număr de patru cifre.

Numărul de cifre cu care s-au scris numerele de 4 cifre pînă la cea de pe locul 34 788 inclusiv este $34\,788 - 2\,889 = 31\,899$. Fiecare număr avînd patru cifre, rezultă din calculul $31\,899 = 4 \cdot 7\,974 + 3$, că numărul care conține cifra căutată este al 7 975-lea din cele de 4 cifre. Acesta este $7\,975 + 999 = 8\,974$. Cifra căutată este a treia cifră a acestui număr, deci 7.

Comentariu. În rezolvarea problemei am parcurs următoarele etape :

1) am stabilit cîte cifre are numărul care conține cifra cerută ;

2) am stabilit al cîtelea este acesta printre numerele cu 4 cifre ;

3) am aflat efectiv numărul care conține cifra cerută.

5. Considerăm toți multiplii lui 5, începînd cu 0, în ordine crescătoare. Al cîtelea este cel mai mic dintre aceștia, avînd suma cifrelor egală cu 45 ?

Soluție. Să observăm că astfel de multipli există. De exemplu : 919 191 915. Să-l aflăm întîi pe cel mai mic cu proprietatea cerută. El se află, cu siguranță, printre multiplii cu 6 cifre pentru că cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 45 este 99 999, dar acesta nu este multiplu de 5. Singurul multiplu de 5 cu șase cifre care se termină în 0 și are proprietatea cerută este 999 990.

Să căutăm, acum, cel mai mic multiplu de 5 cu 6 cifre care are suma cifrelor 45 și se termină în 5. Dacă ultima cifră este 5, atunci celelalte 5 cifre au suma 40, iar cel mai mic număr de 5 cifre, cu suma 40 este 49 999. (Dacă ar începe cu 3 am avea $3 + 9 + 9 + 9 + 9 = 39 < 40$). Rezultă că cel mai mic număr cu proprietatea cerută este 499 995. Rămîne să aflăm al cîtelea este acesta, în șirul multiplilor lui 5, începînd cu 0.

Pînă la el inclusiv sînt $499\,995 : 5 = 99\,999$ multipli nenuli ai lui 5. Întrucît numărătoarea o facem de la 0, rezultă că cel mai mic multiplu de 5 cu proprietatea că suma cifrelor sale este 45 este al 100 000 în succesiunea cerută.

Comentariu. Să observăm că, pentru a rezolva problema, a fost necesar să determinăm întîi efectiv numărul și apoi să stabilim pe ce loc se află.

6. În cîte moduri pot fi distribuite 10 cărți diferite la două persoane ?

Soluție. Numerotăm cărțile de la 1 la 10. Fie cele două persoane A și B. Un mod de împărțire a cărților poate fi, de exemplu : $ABAABBBABB$, adică persoana A primește cărțile cu numerele de ordine 1, 3, 4, 8, iar persoana B primește cărțile cu numerele de ordine 2, 5, 6, 7, 9, 10. O singură carte o putem da lui A sau lui B. Două cărți pot fi distribuite în

Scanned with OKEN Scanner

patru moduri : AA, AB, BA, BB (1) adică ambele lui A, prima lui A a doua lui B, prima lui B a doua lui A sau ambele lui B. Pentru a afla în cîte moduri pot fi distribuite primele trei cărți celor două persoane adăugăm la distribuirile (1) la dreapta litera A sau B și obținem :

$$AAA,\ ABA,\ BAA,\ BBA,$$
$$AAB,\ ABB,\ BAB,\ BBB. \qquad (2)$$

Există, deci, $4 \cdot 2 = 8$ moduri de distribuire a trei cărți celor două persoane.

De exemplu, prin ABA înțelegem că persoana A primește cărțile cu numărul de ordine 1 și 3, iar persoana B cartea cu numărul de ordine 2. Fiecare carte adăugată în continuare dublează numărul posibilităților.

Să recapitulăm :

O carte o putem distribui în două moduri ; două cărți în $4 = 2^2$ moduri ; 3 cărți în $4 \cdot 2 = 2^3$ moduri ; 4 cărți în $2^3 \cdot 2 = 2^4$ moduri.

Cum pentru fiecare carte adăugată în continuare numărul posibilităților se dublează, înseamnă că pentru 10 cărți există 2^{10} posibilități. Dintre acestea, trebuie excluse cele două cazuri în care A sau B ar primi toate cele 10 cărți. Există, deci, $2^{10} - 2 = 1\,024 - 2 = 1\,022$ posibilități de distribuire a celor 10 cărți la două persoane.

Comentarii. 1). Dacă în locul lui A punem cifra 1, iar în locul lui B cifra 2 atunci putem interpreta problema în felul următor : Există 2^{10} numere de cîte 10 cifre formate numai cu cifrele 1 și 2 (am considerat și numerele cu toate cifrele egale cu 1, respectiv cu 2).

2). O generalizare este următoarea :

Există 2^n numere de cîte n cifre formate numai cu două cifre diferite de zero.

3). Se poate demonstra că numărul numerelor de n cifre formate cu m cifre diferite de zero este m^n.

4). Problema poate fi interpretată astfel :

Dacă din mulțimea celor 10 cărți fixăm o submulțime nevidă pe care o dăm persoanei A, atunci persoanei B îi dăm complementara acestei mulțimi. Evident că o dată cu mulțimea vidă se exclude și mulțimea totală. Rămîne că problema revine la a afla numărul submulțimilor unei mulțimi E cu 10 elemente, diferite de mulțimea vidă și de E. Cum numărul total este 2^{10}, răspunsul este $2^{10} - 2$.

7. Se scriu numerele raționale pozitive sub forma următorului șir :

$$\frac{1}{1};\ \frac{2}{1}, \frac{1}{2};\ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3};\ \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4};\ \ldots$$

Al cîtelea termen al șirului este $\dfrac{2\,003}{1\,999}$?

Soluție. Împărțim numerele în grupe în felul următor :

În grupa $K (K \geqslant 2)$ intră numerele pentru care suma dintre numărător și numitor este K. De exemplu :

Grupa 2 : $\dfrac{1}{1}$; Grupa 3 : $\dfrac{2}{1}, \dfrac{1}{2}$; Grupa 4 : $\dfrac{3}{1}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots$; Grupa K : $\dfrac{K-1}{1}, \dfrac{K-2}{2}, \dfrac{K-3}{3}, \ldots, \dfrac{2}{K-2}, \dfrac{1}{K-1}$.

În grupa K vor fi $K - 1$ numere. Ordinea lor în această grupă este dată de numărul de la numitor. În cazul problemei noastre, K este $2\,003 + 1\,999 = 4\,002$.

Numărul $\frac{2\,003}{1\,999}$ este al 1 999-lea în această grupă. În grupa 4 001 vor fi 4 000 numere. Pînă la primul număr din grupa 4 002 vor fi:

$$1+2+3\ldots+4\,000=\frac{4\,000\cdot 4\,001}{2}=2\,000\cdot 4\,001=8\,002\,000$$

numere. Numărul $\frac{2\,003}{1\,999}$ va fi deci pe locul $8\,002\,000+1\,999=8\,003\,999$ în şirul considerat.

Comentarii. 1). Se observă că, în şirul considerat, dintre două numere, înainte este acela în care suma dintre numărător şi numitor este mai mică, iar dacă acestea sînt egale primul este acela cu numitorul mai mic.

2). Comparaţi cu soluţia problemei nr. 4.

8. a) Cîte numere naturale nenule, mai mici decît 100, nu sînt divizibile nici cu 2, nici cu 3?

b) Cîte numere naturale nenule, mai mici cu 1 000, nu sînt divizibile nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7?

Soluţie. a) Pentru că numerele cerute sînt mai mici decît 100 vom considera primele 99 de numere naturale începînd cu 1. Vom exclude, în primul rînd, numerele divizibile cu 2. Ele sînt 2, 4, 6, ..., 98 adică $\left[\frac{99}{2}\right]=49$ de numere. Excludem, apoi, numerele multipli de 3. Acestea sînt 3, 6, ..., 99. Avem $\left[\frac{99}{3}\right]=33$ astfel de numere. Ar părea că rămîn $99-(49+33)$ numere care nu sînt divizibile nici cu 2, nici cu 3.

Să observăm însă că anumite numere au fost numărate de două ori. De exemplu, 6, 12, 18, ... adică numere care se divid şi cu 2 şi cu 3, deci cu 6. Ele sînt în număr de $\left[\frac{99}{6}\right]=16$. Rezultă că numărul numerelor divizibile cu 2 sau 3 este: $49+33-16=66$.

Rămîne că numărul numerelor mai mici ca 100 care nu sînt divizibile nici cu 2, nici cu 3 este:

$$99-66=33.$$

b) Vom folosi acelaşi procedeu ca la punctul a) adică vom afla întîi numărul numerelor divizibile cu 3 sau cu 5 sau cu 7, mai mici ca 1 000.

Numărul celor divizibile cu 3 este $\left[\frac{999}{3}\right]=333$, al celor divizibile cu 5 este $\left[\frac{999}{5}\right]=199$, iar al celor divizibile cu 7 este $\left[\frac{999}{7}\right]=142$.

Printre aceste $333+199+142=674$ numere am numărat de două ori pe cele divizibile cu $3\cdot 5$, cu $3\cdot 7$ şi cu $5\cdot 7$.

Numărul lor este:

$$\left[\frac{999}{15}\right]+\left[\frac{999}{21}\right]+\left[\frac{999}{35}\right]-\left[\frac{999}{105}\right]=66+47+28-9=132.$$

Am scăzut numărul $\left[\frac{999}{105}\right]$ pentru că altfel am fi numărat de două ori numerele divizibile cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 3, 5, 7, adică pe cele divizibile cu 15 şi cu 21 şi cu 35.

Rămîne că numărul numerelor naturale nenule mai mici ca 1000, care nu se divid nici cu 3, nici cu 5, nici cu 7 este:

$$999 - (674 - 132) = 457.$$

Comentariu. Problema admite numeroase alte variante. Pentru o rezolvare corectă este necesar să nu se numere de mai multe ori acelaşi număr.

Numerele cerute puteau fi calculate astfel:

În problema a):

$$n = 99 - \left[\frac{99}{2}\right] - \left[\frac{99}{3}\right] + \left[\frac{99}{2\cdot 3}\right];$$

În problema b):

$$n = 999 - \left[\frac{999}{3}\right] - \left[\frac{999}{5}\right] - \left[\frac{999}{7}\right] + \left[\frac{999}{3\cdot 5}\right] + \left[\frac{999}{3\cdot 7}\right] + \left[\frac{999}{5\cdot 7}\right] - \left[\frac{999}{3\cdot 5\cdot 7}\right]$$

9. a) Care este exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a lui 100!?

b) În cîte zerouri se termină 1 000!?

Soluţie. a) Dintre numerele 1, 2, 3, ..., 100, fiecare al doilea număr este divizibil cu 2. Cum $100 = 2 \cdot 50 + 0$, rezultă că de la 1 la 100 sînt 50 de numere divizibile cu 2. Dintre aceste 50 numere, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu puterea a doua a lui 2. Cum $50 = 2 \cdot 25 + 0$, rezultă că sînt 25 de astfel de numere. Dintre aceste 25 de numere, fiecare al doilea este divizibil cel puţin cu 2^3.

Cum $25 = 2 \cdot 12 + 1$, rezultă că sînt 12 astfel de numere. Dintre aceste 12 numere, fiecare al doilea este divizibil cu 2^4, deci din $12 = 2 \cdot 6 + 0$ rezultă că sînt 6 astfel de numere, iar 3 sînt divizibile cel puţin cu 2^5, iar din aceste 3 numere, cum $3 = 2 \cdot 1 + 1$, unul este divizibil cu 2^6.

Nu există nici un număr divizibil cu 2^7 pentru că $2^7 = 128$ care este mai mare ca 100.

Fie acum produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100 = 100!$. Exponentul lui 2 din descompunerea acestui produs în factori primi este:

$$50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

deoarece fiecare factor al produsului 100!, divizibil cu 2^K, însă nu şi cu 2^{K+1}, $K \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se socoteşte, în modul indicat, de K ori ca fiind divizibil cu 2, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^K.

Comentarii. 1). De la împărţirile efectuate am reţinut numai cîturile, nu şi resturile. Aceste cîturi reprezintă, de fapt, părţile întregi ale numerelor $\frac{100}{2}$, $\frac{100}{2^2}$, $\frac{100}{2^3}$, $\frac{100}{2^4}$ etc.

Deci, exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a lui 100! este:

$$\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{2^2}\right] + \left[\frac{100}{2^3}\right] + \left[\frac{100}{2^4}\right] + \left[\frac{100}{2^5}\right] + \left[\frac{100}{2^6}\right] =$$

$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ne-am oprit la $\left[\frac{100}{2^6}\right] = 1$ pentru că $\left[\frac{100}{2^K}\right]$, pentru $K \geqslant 7$, este egal cu 0.

2). Folosind același raționament se poate arăta că exponentul numărului prim p din descompunerea în factori primi a lui $n!$ este egal cu:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

Această sumă este finită pentru că există, cu siguranță, un număr natural a astfel încît $n < p^a$ și deci $\left[\frac{n}{p^b}\right] = 0$, pentru orice număr natural b, cu $b \geqslant a$.

b). Pentru a afla cu cîte zerouri se termină 1 000! să observăm că acest număr este dat de exponentul lui 10 din acest produs.

Cum $10 = 2 \cdot 5$, exponentul lui 10 este dat de exponentul lui 5 din descompunerea în factori primi a lui 1 000! pentru că exponentul lui 2 din aceeași descompunere este mai mare decît cel al lui 5.

Pentru aflarea acestuia folosim procedeul indicat în comentariul punctului a). Avem

$$\left[\frac{1\,000}{5}\right] + \left[\frac{1\,000}{5^2}\right] + \left[\frac{1\,000}{5^3}\right] + \left[\frac{1\,000}{5^4}\right] = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

Rezultă că 1 000! se termină în 249 de zerouri.

10. În cîte moduri distincte se poate descompune numărul 17 640 într-un produs de doi factori primi între ei?

Soluție. Trebuie să determinăm perechile (a, b) de numere prime între ele astfel încît $17\,640 = a \cdot b$. Perechile (a, b) și (b, a) nu vor fi considerate distincte.

Din faptul că $17640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$, rezultă următoarele 8 posibilități:

1). $a = 1$;	$b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$;
2). $a = 2^3$;	$b = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$;
3). $a = 2^3 \cdot 3^2$;	$b = 5 \cdot 7^2$;
4). $a = 2^3 \cdot 5$;	$b = 3^2 \cdot 7^2$;
5). $a = 2^3 \cdot 7^2$;	$b = 3^2 \cdot 5$;
6). $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$;	$b = 7^2$;
7). $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$;	$b = 5$;
8). $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$;	$b = 3^2$.

Comentarii. 1). Am considerat soluție și perechea (1, 17 640) pentru că cel mai mare divizor comun al numerelor 1 și 17 640 este 1 și deci cele două numere sînt prime între ele.

2). Pentru a putea generaliza problema este suficient să observăm că numărul de posibilități de descompunere a numărului $17\,640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ în produs de doi factori primi între ei este același cu numărul de posibilități de descompunere a numărului $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ într-un produs de doi factori primi între ei. Această afirmație este adevărată pentru că la orice descompunere cerută pentru 17 640 corespunde o descompunere a lui 210 — prin reducerea exponenților la unitate. Era, deci, suficient să aflăm numărul divizorilor lui $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Aceasta este $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$. Dar dacă d este un divizor al lui 210 atunci și $\frac{210}{d}$ este un divizor al lui 210 și cum perechile $\left(d, \frac{210}{d}\right)$ și $\left(\frac{210}{d}, d\right)$ nu sînt distincte rezultă că numărul posibilităților este $16 : 2 = 8$.

Scanned with OKEN Scanner

Generalizare: În cîte moduri distincte se poate descompune un număr natural n în produs de doi factori primi între ei?

Soluție. Vom face același raționament din comentariu. Fie:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Acestuia îi asociem numărul $n' = p_1 p_2 \dots p_k$. Cele două numere n și n' se descompun în același număr de moduri ca produse de doi factori primi între ei. Numărul divizorilor lui n' este:

$$\underbrace{(1+1)(1+1)\dots(1+1)}_{k} = 2^k.$$

Dacă d este un divizor al lui n' atunci perechile $\left(d, \frac{n'}{d}\right)$ și $\left(\frac{n'}{d}, d\right)$ nu sînt distincte. Rezultă că avem, în total, $2^k : 2 = 2^{k-1}$ descompuneri.

11. Fie zece puncte distincte situate într-un plan.

1). Dacă cele zece puncte determină 43 și numai 43 de drepte distincte, arătați că trei puncte și numai trei sînt coliniare.

2). Este posibil ca acele zece puncte să determine numai 40 de drepte distincte? Dar numai 41? Dar numai 42 de drepte distincte?

Soluție. Dacă se dau n puncte, $A_1, A_2, \dots, A_n$, trei cîte trei necoliniare, acestea determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte distincte. Într-adevăr, unind un punct cu toate celelalte se obțin $n-1$ drepte. Cum sînt n puncte, se obțin de n ori $n-1$ drepte, deci $n(n-1)$. Dar fiecare dintre acestea a fost numărată de două ori (de exemplu, dr.A_1A_2 și dr.A_2A_1). Rezultă că numărul dreptelor distincte determinate de n puncte, trei cîte trei necoliniare, este $\frac{n(n-1)}{2}$.

1). Dacă printre cele zece puncte ar fi trei cîte trei necoliniare, acelea ar determina $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ drepte. Deoarece sînt numai 43 de drepte distincte înseamnă că trei dintre cele 45 drepte sînt confundate, deci trei puncte sînt coliniare.

În cazul în care trei puncte devin coliniare, „se pierd" două dintre dreptele distincte.

2). Dacă patru puncte devin coliniare, se pierd $\frac{4 \cdot 3}{2} - 1 = 5$ drepte distincte. Tot cinci drepte distincte „se pierd" și în cazul cînd există două grupe de cîte trei puncte coliniare, grupe ce au un punct comun.

Patru drepte se pot „pierde" cînd există două grupe disjuncte de cîte trei puncte coliniare.

Nu există însă nici o situație în care să se poată „pierde" trei și numai trei drepte distincte din cele 45 posibile.

Comentariu. Realizați modele intuitive pentru cazurile posibile de mai sus.

12. Cîte soluții în numere naturale are ecuația:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}? \qquad (1)$$

Pentru $x \neq y$ soluțiile (x, y) și (y, x) sînt considerate distincte.

Soluție. Dacă x și y sînt numere naturale nenule este necesar ca $x > 12$ și $y > 12$. Dacă, de exemplu, $x \leqslant 12$, atunci $\frac{1}{12} - \frac{1}{x} \leqslant 0$, adică $\frac{1}{y} \leqslant 0$, ceea ce nu se poate.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$, (1) se transformă în următoarele ecuații echivalente:

$$12x+12y=xy;\quad 12x-xy+12y=0;\quad 12x-144-xy+12y+144=0$$
$$12(x-12)-y(x-12)+144=0;\quad (x-12)(y-12)-144=0;$$
$$(x-12)(y-12)=144;\quad (x-12)(y-12)=2^4\cdot 3^2.$$

Cum $x-12$ și $y-12$ sînt numere naturale înseamnă că fiecare este un divizor al lui $2^4\cdot 3^2$. Numărul divizorilor lui $2^4\cdot 3^2$ este $(4+1)(2+1)=15$, deci ecuația are 15 soluții.

Comentarii. 1). Soluțiile se obțin, efectiv, astfel:

Fie d un divizor natural al lui 144. Atunci $x-12=d$ și $y-12=\frac{144}{d}$, de unde:

$$x=12+d,\ y=12+\frac{144}{d}.$$

Cum d ia 15 valori distincte înseamnă că obținem efectiv 15 soluții pentru ecuația (1).

2). Se arată, în același mod, că numărul soluțiilor ecuației $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$, în mulțimea numerelor naturale, ($n\in\mathbb{N}^*$), este egal cu numărul divizorilor naturali ai lui n^2.

13. Cîte soluții în numere întregi are inegalitatea:

$$|a|+|b|<10?$$

Se va considera că pentru $a\neq b$ soluțiile (a, b) și (b, a) sînt diferite.

Soluție. Suma $|a|+|b|$ poate lua 10 valori distincte: $0, 1, 2, \ldots, 9$. Fie K una dintre aceste valori, diferită de zero. Să analizăm cîte soluții are ecuația $|a|+|b|=K$, (1). Numărul $|a|$ poate lua valorile $0, 1, 2, \ldots, K-1, K$, deci $K+1$ valori distincte; $|b|$ va lua, respectiv, valorile $K, K-1, \ldots, 1, 0$.

Dacă (a_0, b_0) este o soluție cu componente nenule și diferite de K atunci soluții sînt și perechile $(-a_0, b_0)$, $(a_0, -b_0)$, $(-a_0, -b_0)$, deci, în total, $4(K-1)$ perechi.

Dacă $a_0=0$, soluții sînt perechile $(0, K)$ și $(0, -K)$, iar dacă $a_0=K$, sînt soluții și $(K, 0)$, $(-K, 0)$ deci, în total, pentru un K fixat din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 9\}$, avem $4(K-1)+2+2=4K$ soluții pentru ecuația (1). Pentru $K=0$ ecuația (1) are o singură soluție: $(0, 0)$. Pentru a afla numărul soluțiilor inegalității date, însumăm numărul de soluții ale ecuației (1) pentru $K\in\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Avem:

$$1+4\cdot 1+4\cdot 2+\ldots+4\cdot 9=1+4(1+2+3+\ldots+9)=1+4\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=$$
$$=1+180=181 \text{ soluții.}$$

Comentariu. Dacă avem de rezolvat în aceleași condiții ecuația:

$$|a|+|b|<p,\qquad p\in\mathbb{N}$$

numărul de soluții va fi:

$$1+4[1+2+3+\ldots+(p-1)]=1+4\,\frac{(p-1)\cdot p}{2}=1+2p(p-1).$$

Scanned with OKEN Scanner

14. Se dă un număr natural a. Să se determine cîte valori poate lua numărul natural b astfel încît $a + b$ să dividă pe ab.

Soluţie. Dacă $a + b$ divide pe ab atunci există un număr natural K astfel încît:

$$K(a + b) = ab.$$

Această egalitate se transformă, succesiv, în:

$$K(a + b) - ab - a^2 = -a^2;$$

$$K(a + b) - a(a + b) = -a^2;$$

$$(a + b)(a - K) = a^2.$$

Dacă p este un divizor al lui a^2, atunci din:

$$(a + b)(a - K) = p \cdot \frac{a^2}{p}$$

şi din faptul că $a + b$ şi $a - K$ sînt numere naturale rezultă că putem avea:

$$(1)\quad \begin{cases} a + b = p \\ a - K = \dfrac{a^2}{p} \end{cases} \quad \text{sau} \quad (2)\quad \begin{cases} a + b = \dfrac{a^2}{p} \\ a - K = p \end{cases}$$

Să analizăm varianta (1):

$$b = p - a, \qquad K = a - \frac{a^2}{p}.$$

Din faptul că b este număr natural rezultă că $p - a \geqslant 0$, adică $p \geqslant a$. Deducem de aici că p poate lua atîtea valori cîţi divizori naturali mai mari (nestrict) ca a are a^2. Dar numărul divizorilor naturali ai lui a^2, strict mai mari ca a, este egal cu numărul divizorilor lui a^2 strict mai mici ca a.

Această afirmaţie se justifică imediat: dacă p divide a^2 şi $p > a$, există $q < a$ astfel încît $p \cdot q = a^2$. Dacă $q \geqslant a$ ar rezulta $p \cdot q > a^2$ ceea ce nu se poate.

Dacă notăm cu n' numărul divizorilor naturali ai lui a^2 strict mai mici ca a, iar cu $\tau(a^2)$ numărul tuturor divizorilor naturali ai lui a^2 şi observînd că şi a este un divizor al lui a^2 avem:

$$\tau(a^2) = n' + n' + 1 = 2n' + 1.$$

Pe de altă parte, numărul căutat, pe care îl notăm cu $n(b)$, este egal cu $n' + 1$ deci:

$$\tau(a^2) = n' + n' + 1 = n(b) - 1 + n(b) - 1 + 1$$

de unde $n(b) = \dfrac{\tau(a^2) + 1}{2}$. Cum $\tau(a^2)$ este număr impar rezultă că $n(b)$ este număr natural.

Comentarii. 1). La acelaşi rezultat se ajungea şi pornind de la varianta (2).

2). Să aplicăm rezultatul obţinut pentru $a = 6$.

Trebuie ca $6 + b$ să dividă $6b$. Atunci:

$$a^2 = 36 = 2^2 \cdot 3^2,$$

deci $\tau(36) = (2 + 1)(2 + 1) = 9$ şi $n(b) = \dfrac{9 + 1}{2} = 5$.

Cum $b = p - a = p - 6$, obținem valorile lui b pentru p divizor mai mare sau cel puțin egal cu 6 al lui 36. Avem:

$p = 6$	$b = 0$	și	$6 + 0 \mid 6 \cdot 0$
$p = 9$	$b = 3$	și	$6 + 3 \mid 6 \cdot 3$
$p = 12$	$b = 6$	și	$6 + 6 \mid 6 \cdot 6$
$p = 18$	$b = 12$	și	$6 + 12 \mid 6 \cdot 12$
$p = 36$	$b = 30$	și	$6 + 30 \mid 6 \cdot 30$

15. În cîte moduri se poate scrie un număr întreg sub forma unei diferențe de două pătrate de numere raționale?

Soluție. Fie K un număr întreg. Problema cere să determinăm toate numerele raționale a și b astfel încît:

$$K = a^2 - b^2. \tag{1}$$

Oricare ar fi X număr rațional nenul putem scrie $K = K \cdot X \cdot \frac{1}{X}$. Relația (1) devine:

$$(a + b)(a - b) = K \cdot X \cdot \frac{1}{X}.$$

Pentru determinarea lui a și b putem face o alegere, de exemplu:

$$\begin{cases} a + b = KX; \\ a - b = \dfrac{1}{X}. \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem, obținem:

$$a = \frac{KX}{2} + \frac{1}{2X}, \quad b = \frac{KX}{2} - \frac{1}{2X}.$$

Se observă cu ușurință că a și b sînt numere raționale, deci:

$$K = \left(\frac{KX}{2} + \frac{1}{2X}\right)^2 - \left(\frac{KX}{2} - \frac{1}{2X}\right)^2,$$

oricare ar fi X număr rațional nenul. Rezultă de aici că există o infinitate de moduri în care se poate scrie un număr întreg sub forma unei diferențe de două pătrate de numere raționale.

Comentariu. Pentru $X = 1$ avem:

$$K = \left(\frac{K+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{K-1}{2}\right)^2. \tag{*}$$

Această relație sugerează următoarea interpretare geometrică: dacă numărul K este natural, diferit de un pătrat perfect, atunci egalitatea (*) permite construcția cu rigla și compasul a oricărui număr irațional de forma $\sqrt{K}$.

Scanned with OKEN Scanner

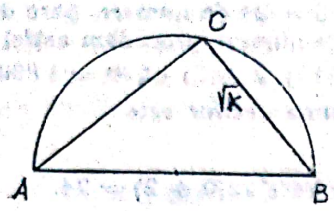


Fig. 1

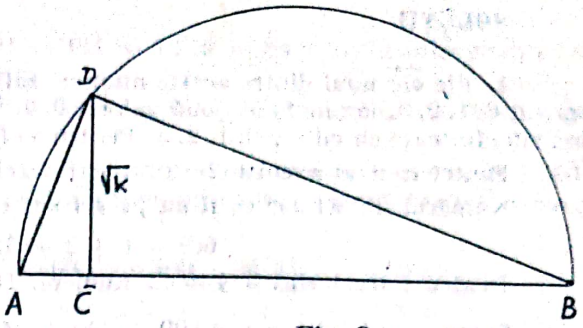


Fig. 2

Se construiește semicercul cu diametrul de lungime $AB = \frac{K+1}{2}$ (fig. 1), apoi, cu centrul în una din extremitățile acestui diametru, de exemplu în A, se construiește un arc de cerc cu raza de lungime $\frac{K-1}{2}$ care intersectează semicercul de diametru $[AB]$ în C. Segmentul $[BC]$, conform teoremei lui PITAGORA, este de lungime $\sqrt{K}$, deci este segmentul căutat. Se cunoaște faptul că acest segment se poate obține și astfel : se construiește semicercul de diametru $[AB]$, cu $AB=K+1$, iar din punctul C al acestui diametru, astfel ca $AC=1$, se construiește perpendiculara pe dreapta AB care intersectează semicercul în D. Triunghiul ADB fiind dreptunghic, rezultă, conform teoremei înălțimii, că segmentul $[CD]$ este de lungime $\sqrt{K}$ (fig. 2).

Față de această metodă, prima prezintă avantajul că nu mai este necesară construcția perpendicularei și, în plus, cînd K este mare, segmentele de lungime 1 și respectiv K sînt greu comparabile față de segmentele de lungime $\frac{K+1}{2}$ și $\frac{K-1}{2}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Cîte numere pare de trei cifre se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3? Care este suma lor?

2. Cîte numere de patru cifre, divizibile cu 4, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5?

3. În cîte moduri se poate plăti suma de 100 lei numai cu monede de 3 lei și de 1 leu? Dar suma de n lei?

4. În cîte moduri poate fi reprezentat numărul natural n sub forma unei sume de două numere naturale nenule dacă reprezentările care diferă doar prin ordinea termenilor sînt considerate identice?

5. Pentru numerotarea paginilor unui dicționar enciclopedic s-au folosit 3 829 cifre. Cîte pagini are dicționarul?

6. Cîte numere naturale, mai mici ca 1 331, sînt prime cu numărul 1 331?

7. Cîte numere naturale, mai mici ca 4 500, sînt prime cu numărul 4 500?

8. Cîte soluții are, în mulțimea numerelor întregi, ecuația :

$$\frac{1}{X}+\frac{1}{Y}=\frac{1}{12}\ ?$$

(Pentru $X \neq Y$, soluțiile (X, Y) și (Y, X) sînt considerate distincte).

9. Cîte funcții $f: E \to F$ se pot defini dacă mulțimea E are 10 elemente, iar mulțimea F are două elemente?

10. a) Cîte diagonale are un poligon convex cu n laturi?

b) Cîte diagonale are o prismă avînd la bază un poligon convex cu n laturi?

11. Cîte plane determină 5 puncte în spațiu?

12. Fie p un număr natural prim și k un număr natural dat. În cîte moduri se poate scrie p^k sub formă de diferență de două pătrate perfecte?

13. Cîte numere naturale există printre numerele :

$$\frac{1\cdot m}{n},\ \frac{2\cdot m}{n},\ \ldots,\ \frac{p\cdot m}{n},$$

unde m, n, p sînt numere naturale nenule?

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚII

1. Fie $\overline{abc}$ unul dintre aceste numere. Cifra a poate lua trei valori: 1, 2, 3, b poate lua 4 valori: 0, 1, 2, 3, iar c numai două valori: 0, 2. În total avem $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ de numere pare de trei cifre formate cu cifrele 0, 1, 2, 3. Pentru a afla suma acestor 24 de numere procedăm astfel:

Pentru a fixat avem $4 \cdot 2 = 8$ numere. Deci suma sutelor este $8(1 + 2 + 3) \cdot 100 = 4\,800$.

Numărul numerelor ce îl au pe b fixat este $3 \cdot 2 = 6$, deci suma zecilor este:

$$6(0 + 1 + 2 + 3) \cdot 10 = 360.$$

Pentru c fixat sînt $3 \cdot 4 = 12$ numere. Deci, suma unităților este $12(0 + 2) = 24$.

Suma cerută va fi: $4\,800 + 360 + 24 = 5\,184$.

2. Fie $n = \overline{abcd}$. Cifra a poate lua 5 valori iar b, 6 valori. Pentru ultimele două cifre fixate există $5 \cdot 6 = 30$ numere. Din $4 | n$ rezultă $4 | \overline{cd}$. Dacă $c \in \{1, 3, 5\}$ rezultă că $d = 2$, iar dacă $c \in \{0, 2, 4\}$ rezultă $d \in \{0, 4\}$, deci $\overline{cd}$ poate lua $3 + 6 = 9$ valori.

În total, există $30 \cdot 9 = 270$ numere cu proprietatea cerută.

3. Putem folosi cel mult 33 de monede de 3 lei. Dacă folosim K monede de 3 lei ($K \leqslant 33$) atunci vom folosi și $100 - 3K$ monede de un leu. Cum K ia exact 34 de valori ($K \in \{0, 1, 2, \ldots, 33\}$) rezultă că sînt exact 34 de posibilități distincte.

Pentru cazul în care avem de plătit o sumă de n lei, putem folosi cel mult $\left[\frac{n}{3}\right]$ monede de 3 lei. Deci plata se poate face folosind K monede de 3 lei, $K \in \left\{0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{3}\right]\right\}$, și $n - 3K$ monede de un leu. În total, avem exact $\left[\frac{n}{3}\right] + 1$ posibilități distincte.

4. Fie $X, Y \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $n = X + Y$.

Cu necesitate, unul din termenii X și Y (și numai unul) este mai mic sau egal cu $\left[\frac{n}{2}\right]$. Dacă ambii termeni ar fi mai mari decît $\left[\frac{n}{2}\right]$, atunci $X + Y > n$, iar dacă amîndoi ar fi mai mici ca $\left[\frac{n}{2}\right]$, atunci $X + Y < n$.

Rezultă că unul dintre termeni poate lua valorile $1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$.

Toate cazurile sînt diferite deoarece al doilea termen nu poate fi mai mic decît $\left[\frac{n}{2}\right]$.

Deci numărul de moduri diferite care realizează cerința problemei este $\left[\frac{n}{2}\right]$.

5. Numărul cifrelor tuturor numerelor de una, două și trei cifre este $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2\,889 < 3\,829$, iar a tuturor numerelor de una, două, trei și patru cifre este $2\,889 + 4 \cdot 9\,000 > 3\,829$ (vezi problema comentată nr. 4).

Rezultă că dicționarul are mai mult de 1 000 pagini și mai puțin de 10 000. Cum pentru scrierea tuturor numerelor de una, două și trei cifre se folosesc 2 889 cifre atunci rămîn $3\,829 - 2\,889 = 940$ cifre cu care se scriu $940 : 4 = 235$ numere de patru cifre. Rezultă că dicționarul are $999 + 235 = 1\,234$ pagini.

6. Avem $1\,331 = 11^3$. Să numărăm cîte numere nu sînt prime cu 1 331. Acestea sînt:

$$1 \cdot 11, 2 \cdot 11, \ldots, 10 \cdot 11, 11 \cdot 11, \ldots, 120 \cdot 11, 121 \cdot 11$$

Scanned with OKEN Scanner

deci în total $121 = 11^2$ numere. Rămîne că $1\,331 - 121 = 1\,210$ numere sînt relativ prime cu 1 331. Evident că problema se poate generaliza:

Dacă p este prim și $k \in \mathbb{N}^*$ atunci există $p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$ numere relativ prime cu p și mai mici decît p^k.

7. Avem $4\,500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Trebuie să găsim numărul numerelor mai mici decît 4 500 care nu sînt divizibile nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5. Conform problemei comentate nr. 8 avem:

$$n = 4\,500 - \frac{4\,500}{2} - \frac{4\,500}{3} - \frac{4\,500}{5} + \frac{4\,500}{2 \cdot 3} + \frac{4\,500}{5 \cdot 3} + \frac{4\,500}{2 \cdot 5} - \frac{4\,500}{2 \cdot 3 \cdot 5} =$$

$$= 4\,500 - 2\,250 - 1\,500 - 900 + 750 + 450 + 300 - 150 = 1\,200,$$

Acest număr se mai poate scrie:

$$n = 4\,500 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1\,200.$$

Generalizare. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ atunci numărul numerelor mai mici ca n și prime cu acesta este:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

8. Conform problemei comentate nr. 12 ecuația are 15 soluții în $\mathbb{N}^*$. Pentru a afla și soluțiile în care una și numai una dintre componente este negativă (de ce nu pot fi ambele componente negative?) scriem ecuația sub forma:

$$(12 - X)(12 - Y) = 144.$$

Conform comentariului de la problema comentată nr. 12 avem:

$$X = 12 + d, \quad Y = 12 + \frac{144}{d},$$

unde d este un divizor întreg al lui 144. Avem 30 astfel de divizori. Trebuie exclus $d = -12$ pentru că, în acest caz, $X = Y = 0$ și împărțirea cu zero nu este definită. Rămîn $30 - 1 = 29$ de soluții.

9. Vezi problema comentată nr. 6. Se obțin 2^{10} funcții.

Se poate demonstra că dacă E are m elemente, iar F are n elemente atunci numărul funcțiilor $f: E \to F$ este n^m.

10. a) Un număr de n puncte distincte, 3 cîte 3 necoliniare, determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte. Pentru a afla numărul diagonalelor, din $\frac{n(n-1)}{2}$ trebuie să scădem numărul laturilor deci:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

b) Unind un vîrf al unuia dintre poligoanele de bază cu toate vîrfurile celui de-al doilea poligon obținem n segmente. Dintre acestea, unul este muchie a prismei și încă două sînt diagonale ale fețelor prismei. Rămîne că dintr-un vîrf al unuia dintre poligoanele de bază se pot duce $n - 3$ diagonale ale prismei. În total, vom avea $n(n-3)$ diagonale.

11. Analizăm cazurile: a) punctele sînt 3 cîte 3 necoliniare și nu există 4 coplanare; b) 3 coliniare și nu sînt toate 5 coplanare; c) toate 5 coliniare; d) 3 cîte 3 necoliniare și 4 și numai 4 coplanare; e) toate 5 coplanare.

Scanned with OKEN Scanner

12. Este suficient să determinăm perechile de numere naturale (a, b) astfel încît $a^2 - b^2 = p^k$. Putem scrie $(a-b)(a+b) = p^k$, de unde $\begin{cases} a - b = p^m; \\ a + b = p^{k-m}. \end{cases}$

Cum $a - b \leqslant a + b$, rezultă $p^m \leqslant p^{k-m}$, de unde $m \leqslant k - m$, $m \leqslant \frac{k}{2}$, cu $m \in \mathbb{N}$.

Dacă $p = 2$, numărul căutat este $\left[\frac{k}{2}\right]$, iar pentru p prim impar numărul soluțiilor este $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$.

13. Despre m și n nu știm dacă sînt sau nu prime între ele. Fie d cel mai mare multiplu comun al lor. Atunci există numerele naturale a și b astfel încît:

$$m = ad, \quad n = bd,$$

unde a și b sînt prime între ele.

Numerele din enunț devin:

$$\frac{1 \cdot a}{b}, \frac{2 \cdot a}{b}, \ldots, \frac{p \cdot a}{b}. \qquad (*)$$

Cum a și b sînt prime între ele rezultă că printre numerele (*) sînt exact $\left[\frac{p}{b}\right]$ numere naturale. Din $n = bd$ avem $b = \frac{n}{d}$. Înlocuind, obținem că numărul căutat este $\left[\frac{pd}{n}\right]$.

SUME. PRODUSE

PROBLEME COMENTATE

1. Să se calculeze suma primelor n numere naturale nenule.

Soluție. Avem de calculat:

$$S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n.$$

Termenii 1 și n sînt termeni „extremi". Termenii 2 și $n-1$, 3 și $n-2$, ..., k și $n-k+1$ sînt termeni egali depărtați de extremi. Să observăm că suma a doi termeni oarecare, egali depărtați de extremi, este egală cu suma termenilor extremi. Într-adevăr:

$$k + (n-k+1) = n+1.$$

Vom scrie de două ori suma S în felul următor:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Însumînd, membru cu membru, obținem:

$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+\ldots+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

Rezultă că $2S = n(n+1)$ și deci:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Comentarii. 1). Am demonstrat că suma primelor n numere naturale este $\frac{n(n+1)}{2}$. Acest rezultat l-am folosit deja în capitolele precedente. Există și alte demonstrații ale acestui rezultat. În general, valabilitatea unei propoziții care depinde de un număr natural n se demonstrează cu ajutorul metodei *inducției matematice*, metodă ce depășește, însă, cadrul gimnaziului.

2). Să încercăm să deducem suma primelor n numere naturale impare, adică:

$$s_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-3) + (2n-1).$$

Observăm că:

$$s_1 = 1;\ s_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2;\ s_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2;\ s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2;$$
$$s_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2.$$

Sîntem conduși, de aceste cazuri particulare, la concluzia că:

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

Bănuim că acesta este rezultatul, dar nu l-am demonstrat. El se demonstrează, de exemplu, astfel: Considerăm suma:

$$S_{2n} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) + \ldots + (n+n) = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1).$$

Pe de altă parte:

$$S_{2n} = (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) + [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)] =$$
$$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)] =$$
$$= n(n+1) + [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)].$$

Rezultă:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n(2n+1) - n(n+1) = n^2.$$

Încercați să dați o justificare „geometrică" a faptului că suma primelor n numere naturale, impare este n^2.

3). Pentru exprimarea unor sume se poate folosi simbolul „Σ" care ușurează scrierea.

Prin $\sum_{k=1}^{n} a_k$ înțelegem sumă de a_k de la $k = 1$ până la $k = n$, adică:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

În loc de $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ putem scrie $\sum_{k=1}^{n} k$, iar $\sum_{k=1}^{5} 2^k = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$.

Să reținem următoarele proprietăți:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k; \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k; \qquad \sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{de } n \text{ ori}} = n.$$

Am avut de calculat suma:

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1).$$

Dar:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k) - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2 \sum_{k=1}^{n} k - n.$$

Am demonstrat $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, deci:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

Pentru exprimarea unor produse se poate folosi simbolul „Π".

Prin $\prod_{k=1}^{n} a_k$ înțelegem $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$, iar $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

Scanned with OKEN Scanner

2. Suma a 63 de numere naturale nenule este 2 000. Să se demonstreze că cel puțin două dintre acestea sînt egale.

Soluție. Presupunem că cele 63 de numere sînt distincte și sînt cele mai mici posibile adică 1, 2, 3, ..., 63. Suma lor S va fi:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 63 = \frac{63 \cdot 64}{2} = 2\,016.$$

Dar $2\,016 > 2\,000$ deci, cu necesitate, trebuie să existe printre cele 63 numere cel puțin două egale.

Fie, de exemplu, următorul model:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 47 + \ldots + 61 + 62 + 47 = 2\,000.$$

Comentariu. Ne putem întreba care este cel mai mare număr de numere egale cu proprietatea cerută. Evident că cele 63 de numere nu pot fi toate egale deoarece 2 000 nu se divide cu 63. Printre cele 63 de numere nenule pot exista cel mult 62 de numere egale cu proprietatea că suma lor este 2 000. De exemplu:

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{de 62 ori}} + 1\,938 = 2\,000.$$

Dacă există 62 de numere egale ele verifică ecuația:

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{\text{de 62 ori}} + y = 2\,000;$$

sau:

$$62x + y = 2\,000, \quad x, y \in \mathbb{N}^*.$$

Arătați că această ecuație are în numere naturale nenule exact 32 de soluții.

3. Fie $d_1, d_2, \ldots, d_k$ toți divizorii naturali ai numărului natural n. Demonstrați că:

$$(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_k)^2 = n^k.$$

Soluție. Fie $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k$. Atunci $d_1 = \frac{n}{d_k}$; $d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}$; ...; $d_k = \frac{n}{d_1}$.

Înmulțind aceste egalități, membru cu membru, obținem:

$$d_1 d_2 d_3 \ldots d_k = \frac{n}{d_k} \cdot \frac{n}{d_{k-1}} \cdot \frac{n}{d_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{d_1} = \frac{n^k}{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \ldots d_k}.$$

De aici obținem:

$$(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \ldots \cdot d_k)^2 = n^k.$$

Comentarii. 1). Evident, doi dintre divizori sînt 1 și n. Rezultă că $d_1 = 1$, iar $d_k = n$.

2). Să demonstrăm că dacă S este suma divizorilor naturali ai numărului natural $n \geqslant 2$, iar k numărul acestora, atunci există dubla inegalitate:

$$\frac{3}{4} n \geqslant \frac{S}{k} > \sqrt{n}.$$

Fie $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ divizorii lui n. Cum $d_1 = 1$ și $d_k = n$, avem $d_1 + d_k = n + 1$. Dar $n + 1 \leqslant \frac{3}{2} n$ pentru $n \geqslant 2$ (verificați!). Cu siguranță, $d_2 \geqslant 2$ și deci $d_{k-1} \leqslant \frac{n}{2} < \frac{3n}{4}$.

Rezultă că toți divizorii lui n, mai mici ca n, sînt mai mici decît $\frac{3n}{4}$. Avem:

$$S = d_1 + d_2 + \ldots + d_k \leqslant \frac{3}{2} n + (k-2) \frac{3}{4} n = \frac{3}{4} nk.$$

Împărțind prin k obținem $\frac{3}{4} n \geqslant \frac{S}{k}$. Cînd se obține egalitate?

Pentru a demonstra partea a doua a inegalității, aplicînd inegalitatea mediilor, avem:

$$d_p + d_{k-p+1} > 2\sqrt{d_p \cdot d_{k-p+1}}.$$

Dar $d_p \cdot d_{k-p+1} = n$ și deci $d_p + d_{k-p+1} > 2\sqrt{n}$. Dînd lui p valori de la 1 pînă la n și însumînd, obținem:

$$2(d_1 + d_2 + \ldots + d_k) > 2k\sqrt{n},$$

adică $S > k\sqrt{n}$, de unde $\frac{S}{k} > \sqrt{n}$.

4. Să se calculeze sumele:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100};$$

$$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + 100 \cdot 100!;$$

$$S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{99}{100!}.$$

Soluție. Vom încerca să scriem fiecare termen al sumelor date ca o diferență de doi termeni consecutivi. Dacă acest fapt este posibil, atunci, după reduceri, obținem sumele cerute.

Termenul general al sumei S_1 este $\frac{1}{k(k+1)}$. Acesta se poate scrie $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, unde k ia valori de la 1 la 99. Avem:

$$S_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) =$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(-\frac{1}{99} + \frac{1}{99}\right) -$$

$$- \frac{1}{100} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Termenul general al sumei S_2 este $k \cdot k!$. Avem:

$$k \cdot k! = (k+1-1)\,k! = (k+1) \cdot k! - k!.$$

Dar:

$$(k+1)k! = (k+1)(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k(k+1) = (k+1)!,$$

deci $k \cdot k! = (k+1)! - k!$.

Dînd valori lui k de la 1 la 100, avem:

$$S_2 = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + \ldots + (99! - 98!) + (100! - 99!) +$$
$$+ (101! - 100!) = 101! - 1!.$$

Termenul general al sumei S_3 este $\dfrac{k}{(k+1)!}$, unde k ia valori de la 1 la 99. Avem:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{k!(k+1)} - \frac{1}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!},$$

deci:

$$S_3 = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98!} - \frac{1}{99!}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{99!} - \frac{1}{100!}\right) = 1 - \frac{1}{100!}.$$

Comentarii. Reţineţi metoda! Aceasta are multiple aplicaţii. Rezultatele obţinute se pot generaliza:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

$$1 \cdot 1! + \ldots + n \cdot n! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1,$$

$$\frac{1}{2!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

5. Să se demonstreze dubla inegalitate:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100} < 0{,}1.$$

Soluţie. *Metoda I.* Fie:

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99}{100} \text{ şi } N' = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99}.$$

Se observă că: $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}, \frac{4}{5} > \frac{3}{4}, \frac{6}{7} > \frac{5}{6}, \ldots, \frac{98}{99} > \frac{97}{98}, 1 > \frac{99}{100}$.

deci $N' > N$ și că $N \cdot N' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$.

Dar $N \cdot N' > N^2$, deci $N^2 < \frac{1}{100}$ și rezultă $N < \frac{1}{10}$.

Pentru prima parte a inegalității, să observăm că:

$$N' < 2N = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}.$$

Într-adevăr, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \frac{4}{5} < \frac{5}{6}, \frac{6}{7} < \frac{7}{8}, \ldots, \frac{98}{99} < \frac{99}{100}$ și, prin înmulțire membru cu membru, obținem $N' < 2N$.

Deci $N \cdot 2N > N \cdot N' = \frac{1}{100}$, de unde rezultă $N^2 > \frac{1}{100 \cdot 2}$, deci $N > \frac{1}{10\sqrt{2}}$.

Metoda a II-a. Fie:

$$N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}, \quad N^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdots \frac{99^2}{100^2}.$$

Încadrăm pe N^2 astfel:

$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{4^2} \cdot \frac{5^2-1}{6^2} \cdot \ldots \cdot \frac{99^2-1}{100^2} < N^2 < \frac{1^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{4^2-1} \cdot \frac{5^2}{6^2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{99^2}{100^2-1}.$$

După efectuarea simplificărilor obținem:

$$\frac{1}{200} < N^2 < \frac{1}{101}.$$

Rezultă:

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < N < \frac{1}{10}.$$

Comentarii. 1). O generalizare a acestei duble inegalități este următoarea:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

2). Se poate demonstra o inegalitate mai „tare" și anume:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această inegalitate se numește mai „tare" decît prima pentru că $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

La rîndul ei, este mai „slabă" decît inegalitatea :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

6. Să se calculeze sumele :

$$S_1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99};$$

$$S_2 = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 100 \cdot 2^{99}.$$

Soluție. Pentru calculul lui S_1, pornim de la identitatea :

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}).$$

Pentru $x \neq 1$ avem :

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}. \tag{1}$$

Dacă $n = 100$ și $x = 2$ obținem :

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{99} = \frac{1 - 2^{100}}{1 - 2} = 2^{100} - 1.$$

Pentru calculul lui S_2 considerăm suma :

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

și calculăm produsul $(1 - x) \cdot S$, unde $x \neq 1$. Obținem :

$$(1 - x)S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} -$$
$$- x - 2x^2 - \ldots - (n-1)x^{n-1} - nx^n =$$
$$= 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} - nx^n.$$

Dar :

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

Rezultă, deci :

$$S(1 - x) = \frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n,$$

de unde :

$$S = \frac{1 - x^n}{(1 - x)^2} - \frac{nx^n}{1 - x}.$$

Am obținut, astfel, următoarea egalitate :

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 - x^n}{(1 - x)^2} - \frac{nx^n}{1 - x}. \tag{2}$$

adevărată pentru orice x diferit de 1.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $x = 2$ și $n = 100$ obținem:

$$S_2 = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 100 \cdot 2^{99} = \frac{1 - 2^{100}}{(1-2)^2} - \frac{100 \cdot 2^{100}}{1-2} =$$

$$= 1 - 2^{100} + 100 \cdot 2^{100} = 1 + 99 \cdot 2^{100}.$$

Comentariu. Pentru $x = 1$, sumele $1 + x + \ldots + x^{n-1}$ și $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ se calculează direct și se obține n, respectiv, $\frac{n(n+1)}{2}$.

Identitățile (1) și (2) sînt adevărate pentru orice x diferit de 1, de aceea acestea apar des, sub diferite forme, în multe probleme.

7. Demonstrați că, dacă $a \neq \pm 1$, în produsul $p = (1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^9 + a^{10}) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^9 + a^{10})$ nu rămîn termeni care să conțină pe a la puteri impare, după desfacerea parantezelor și reducerea termenilor asemenea.

Soluție. Dacă am efectua direct înmulțirea am obține $11 \cdot 11 = 121$ de termeni. Este greu de presupus că vom efectua un calcul corect. Să observăm că:

$$1 + a^{11} = (1 + a)(1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^9 + a^{10}),$$

iar:

$$1 - a^{11} = (1 - a)(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^9 + a^{10}).$$

De aici, obținem:

$$1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^9 + a^{10} = \frac{1 + a^{11}}{1 + a} \quad (a \neq -1)$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^9 + a^{10} = \frac{1 - a^{11}}{1 - a} \quad (a \neq 1).$$

Rezultă că:

$$p = \frac{1 + a^{11}}{1 + a} \cdot \frac{1 - a^{11}}{1 - a} = \frac{1 - (a^{11})^2}{1 - a^2} = \frac{1 - (a^2)^{11}}{1 - a^2} =$$

$$= \frac{(1 - a^2)(1 + a^2 + a^4 + a^6 + \ldots + a^{20})}{1 - a^2} = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + \ldots + a^{20}.$$

Deci p conține numai puteri pare ale lui a.

Comentariu. Încercați să aflați coeficientul lui a^k, $0 \leqslant k \leqslant 20$, fără a efectua înmulțirea și arătați că acest coeficient, pentru k impar, este 0.

8. Să se determine unsprezece numere nenegative, cu proprietatea că fiecare dintre acestea este egal cu pătratul sumei celorlalte zece.

Soluție. Fie $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ numerele căutate astfel încît:

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_{11}. \qquad (1)$$

Dacă notăm cu s suma lor, atunci din enunț rezultă că:

$$a_1 = (s - a_1)^2, \; a_2 = (s - a_2)^2, \; a_3 = (s - a_3)^2, \; \ldots, \; a_{11} = (s - a_{11})^2. \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind în (1), avem:

$$(s - a_1)^2 \leqslant (s - a_2)^2 \leqslant (s - a_3)^2 \leqslant \ldots \leqslant (s - a_{11})^2. \quad (3)$$

Pe de altă parte, cum $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_{11}$, rezultă că:

$$s - a_1 \geqslant s - a_2 \geqslant s - a_3 \geqslant \ldots \geqslant s - a_{11}.$$

Cum $s - a_{11} \geqslant 0$, putem ridica la pătrat și obținem:

$$(s - a_1)^2 \geqslant (s - a_2)^2 \geqslant (s - a_3)^2 \geqslant \ldots \geqslant (s - a_{11})^2. \quad (4)$$

Comparînd relațiile (3) și (4), rezultă:

$$(s - a_1)^2 = (s - a_2)^2 = (s - a_3)^2 = \ldots = (s - a_{11})^2.$$

De aici ar rezulta că $s - a_k = \pm (s - a_p)$, k și p luînd valorile $1, 2, \ldots, 11$. Cum $s - a_k \geqslant 0$ și $s - a_p \geqslant 0$ rezultă $s - a_k = s - a_p$, de unde $a_k = a_p$, deci toate cele unsprezece numere căutate sînt egale, adică:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{11} = a.$$

Conform enunțului trebuie să avem $a = (10a)^2$, adică $100a^2 = a$, de unde $a = 0$ sau $a = \frac{1}{100}$.

Comentarii. 1). În rezolvare am folosit următoarea implicație:

Din $x \leqslant y$ și $y \leqslant x$, rezultă $x = y$, care arată că relația de ordine nestrictă este *antisimetrică*.

2). Din $a \leqslant b$ nu rezultă întotdeauna că $a^2 \leqslant b^2$. Implicația ste adevărată numai dacă a și b sînt nenegative. **Contraexemplu:** din $-3 < 2$ nu rezultă $(-3)^2 < 2^2$.

9. Fie ecuația:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

și suma $S_n = x_1^n + x_2^n$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației (1). Să se determine S_n în funcție de a, b și c, pentru $n = 0, 1, 2, 3$.

Soluție. Pentru $n = 0$, $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$. Pentru $n = 1$, $S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Vom stabili o relație, numită *relație de recurență*, între sumele s_{n-2}, s_{n-1}, s_n, valabilă pentru orice n natural, mai mare sau cel puțin egal cu 2.

Presupunem $c \neq 0$, deci ecuația (1) nu are soluția 0. Înmulțim ecuația dată cu x^{n-2} și obținem:

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = 0. \quad (2)$$

Soluțiile ecuației (1) sînt soluții și ale ecuației (2), adică x_1 și x_2 verifică ecuația (2):

$$ax_1^n + bx_1^{n-1} + cx_1^{n-2} = 0,$$

$$ax_2^n + bx_2^{n-1} + cx_2^{n-2} = 0.$$

Adunînd, membru cu membru, aceste două egalități obținem:

$$a(x_1^n + x_2^n) + b(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + c(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0$$

deci, pentru $n \geqslant 2$, avem:

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0. \quad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația (3) reprezintă o relație de recurență pentru calculul sumei puterilor asemenea ale rădăcinilor ecuației de gradul al doilea. Pentru $n = 2$ avem :

$$aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0 ;$$

$$S_2 = \frac{1}{a} \cdot (-bS_1 - cS_0) = \frac{1}{a}\left[-b\left(-\frac{b}{a}\right) - 2c\right] = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} \cdot$$

Pentru $n = 3$ obținem :

$$aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0 ;$$

$$S_3 = \frac{1}{a}\left[-bS_2 - cS_1\right] = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) \cdot$$

Comentariu. În cazul în care $c = 0$ nu mai putem înmulți cu x^{n-1} ecuația (1). În acest caz soluțiile ecuației (1) sînt 0 și $-\frac{b}{a}$, iar calculul lui S_n se face în mod direct.

În general, pentru a calcula S_n, n fiind dat, trebuie să calculăm toate sumele $S_0, S_1, \ldots S_{n-1}$.

10. Care este exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a numărului $31 \cdot 32 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60$?

Soluție. Avem :

$$31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot \ldots \cdot 59 \cdot 60}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 30} =$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 57 \cdot 59)(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 58 \cdot 60)}{30\,!} =$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 57 \cdot 59)[(1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (29 \cdot 2) \cdot (30 \cdot 2)]}{30\,!} =$$

$$= \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 57 \cdot 59)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 29 \cdot 30) \cdot 2^{30}}{30\,!} = 2^{30} \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 57 \cdot 59).$$

Cum $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 57 \cdot 59$ este număr impar rezultă că exponentul lui 2 este 30.

Comentarii. 1). Produsul dat se mai putea scrie :

$$(30 + 1)(30 + 2)(30 + 3) \cdot \ldots \cdot (30 + 29)(30 + 30).$$

De aici rezultă următoarea generalizare : Exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a numărului $(n + 1)(n + 2) \cdot \ldots \cdot (n + n)$ este n. Într-adevăr :

$$(n + 1)(n + 2) \cdot \ldots \cdot (n + n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n + 1)(n + 2) \cdot \ldots \cdot (n + n)}{n\,!} =$$

$$= \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)] \cdot [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)]}{n\,!} =$$

$$= \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)] \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) \cdot 2^n}{n\,!} = 2^n \cdot [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)].$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ este impar, rezultă că exponentul lui 2 este n.

2). În cazul particular dat, o altă soluție este următoarea:

Calculăm exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a lui 60! și exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a lui 30!. Diferența rezultatelor este numărul căutat;

$$\left(\left[\frac{60}{2}\right]+\left[\frac{60}{4}\right]+\left[\frac{60}{8}\right]+\left[\frac{60}{16}\right]+\left[\frac{60}{32}\right]\right)-$$

$$-\left(\left[\frac{30}{2}\right]+\left[\frac{30}{4}\right]+\left[\frac{30}{8}\right]+\left[\frac{30}{16}\right]\right)=$$

$$=(30+15+7+3+1)-(15+7+3+1)=30.$$

11. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$;

b) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<3$.

Soluție. a) Inegalitatea revine la:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1.$$

Dar:

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k\cdot k}<\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k},\ k\geqslant 2.$$

Obținem:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{1}{n}=$$

$$=1-\frac{1}{n}<1.$$

b) Fie:

$$s=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să observăm că:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k} < \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}}_{\text{de } k-1 \text{ ori}} = \frac{1}{2^{k-1}},\ k \geqslant 2.$$

Avem, deci:

$$s < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (1)$$

În identitatea:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},\ x \neq 1,$$

înlocuim pe x cu $\frac{1}{2}$ și obținem:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Înlocuind în (1), rezultă:

$$s < 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Comentariu. Inegalitățile demonstrate arată că, indiferent cît de mare este n, sumele din membrul stîng nu depășesc un anumit prag, adică sînt *mărginite*.

Spre deosebire de acestea, suma inverselor numerelor naturale nenule, $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, nu este mărginită, adică oricît de mare ar fi un număr M, există un număr natural n astfel încît $s_n > M$.

Suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ se mai numește și „*seria armonică*".

12. Să se precizeze numerele naturale n, $n \leqslant 12$, pentru care există o alegere a semnelor plus și minus, astfel încît.

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm n = 0.$$

Soluție. Pentru $n = 1$ sau $n = 2$ egalitatea nu se poate realiza.

Pentru $n = 3$ avem $1 + 2 - 3 = 0$ și numai această variantă.

Pentru $n = 4$ avem $1 - 2 - 3 + 4 = 0$ și numai această posibilitate.

Pentru $n = 5$ avem trei numere impare, 1, 3, 5 și două pare, 2 și 4. Indiferent de semnele alese, $1 \pm 3 \pm 5$ este un număr impar și, indiferent de semnele alese, $\pm 2 \pm 4$ este par. Suma dintre un număr par și unul impar nu poate fi 0.

Pentru $n = 6$, avem $(1 \pm 3 \pm 5) + (\pm 2 \pm 4 \pm 6)$, sumă care nu poate fi zero pentru același motiv: indiferent de semnele alese, suma din prima paranteză este un număr impar, iar cea din a doua paranteză un număr par.

Pentru $n = 7$ egalitatea se realizează:

$$1 + 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + 7 = 0.$$

Dacă $n = 8$ avem:

$$1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 = 0.$$

Cazurile $n = 9$ și $n = 10$ sînt similare cu $n = 5$, respectiv $n = 6$, iar cazurile $n = 11$ și $n = 12$ sînt similare cu $n = 7$, respectiv $n = 8$. Rămîne că numerele căutate sînt:

$$3, 4, 7, 8, 11, 12.$$

Comentarii. 1). Să observăm că în fiecare dintre cazurile $n = 3$, $n = 4$, $n = 7$, $n = 8$ am prezentat modelul de realizare al egalității cerute. Prezentați modele pentru $n = 11$ și $n = 12$.

2). Urmînd un raționament analog, se poate arăta că n nu poate fi de forma $4k+1$ sau $4k + 2$. Se demonstrează că egalitatea se realizează pentru orice n de forma $4k$ sau $4k + 3$.

13. Să se demonstreze că suma:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m}$$

nu poate fi număr natural, oricare ar fi $n, m \in \mathbb{N}^*$ și $m > n$.

Soluție. Printre numerele n, $n + 1$, $n + 2$, ..., m există un singur număr p care conține în descompunerea sa în factori primi pe 2 la puterea cea mai mare.

Pentru a demonstra această afirmație să observăm întîi că există printre numerele n, $n + 1$, ..., m cel puțin un număr par. Acest fapt rezultă din condiția $m > n$ care arată că avem cel puțin două numere naturale consecutive, deci cel puțin unul este par.

Mai departe, folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că există două numere p_1 și p_2 care conțin pe 2 la puterea cea mai mare a, adică $p_1 = 2^a \cdot k_1$ și $p_2 = 2^a \cdot k_2$, unde k_1 și k_2 sînt numere impare, iar $k_1 < k_2$. De aici rezultă că avem $k_1 < k_1 + 1 \leqslant k_2$. Înmulțind aceste inegalități cu 2^a, obținem $2^a k_1 < 2^a(k_1 + 1) \leqslant 2^a k_2$, deci numărul $2^a(k_1 + 1)$ este element al mulțimii $\{n, n + 1, n + 2, \ldots, m\}$. Cum $k_1 + 1$ este par rezultă că exponentul lui 2 din descompunerea în factori a numărului $2^a(k_1 + 1)$ este mai mare decît a, ceea ce contrazice presupunerea făcută.

Rezultă că există un singur numitor care îl conține ca factor pe 2 la puterea cea mai mare. Aducînd la același numitor, toți numărătorii, cu excepția celui din fracția care conține pe 2 la puterea cea mai mare la numitor, vor fi înmulțiți cu numere pare.

Ca rezultat vom avea o fracție în care numărătorul este un număr impar iar numitorul un număr par, deci suma dată nu poate fi un număr natural.

Comentariu. Pentru $n = 1$ obținem $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$, și am demonstrat deci că, pentru $m > 1$, această sumă nu este un număr natural.

14. Considerăm suma $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1000000}}$.

Să se determine două numere naturale consecutive între care să se afle S.

Soluție. Vom demonstra mai întîi dubla inegalitate:

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}), \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $k \in \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$. Observăm că:

$$(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \cdot (\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = k + 1 - k = 1,$$

$$(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \cdot (\sqrt{k} + \sqrt{k-1}) = k - k + 1 = 1.$$

Amplificînd primul și ultimul membru al relației (1) cu $\sqrt{k+1} + \sqrt{k}$, respectiv cu $\sqrt{k} + \sqrt{k-1}$, obținem relația echivalentă cu (1):

$$\frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}, \qquad (2)$$

care rezultă imediat, dacă ținem cont că:

$$\frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

În (1) dăm lui k valorile $2, 3, \ldots, 1000\,000$ și obținem:

$$2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - \sqrt{1});$$

$$2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2});$$

. . . . . .

$$2(\sqrt{1\,000\,000} - \sqrt{999\,999}) < \frac{1}{\sqrt{999\,999}} < 2(\sqrt{999\,999} - \sqrt{999\,998});$$

$$2(\sqrt{1\,000\,001} - \sqrt{1\,000\,000}) < \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}} < 2(\sqrt{1\,000\,000} - \sqrt{999\,999}).$$

Însumînd, membru cu membru, obținem:

$$2(\sqrt{1\,000\,001} - \sqrt{2}) < S - 1 < 2(\sqrt{1\,000\,000} - \sqrt{1});$$

$$2\sqrt{1\,000\,001} - 2\sqrt{2} < S - 1 < 2\,000 - 2;$$

$$2\sqrt{1\,000\,001} + 1 - 2\sqrt{2} < S < 1\,999.$$

Dar $2\sqrt{1\,000\,001} + 1 - 2\sqrt{2} > 2 \cdot 1\,000 + 1 - 3 = 1\,998$. Deci $1\,998 < S < 1\,999$.

Rezultă că numerele căutate sînt 1 998 și 1 999.

Comentariu. Soluția nu a fost simplă. A trebuit să încadrăm termenul general al sumei între două diferențe de termeni consecutivi.

Dacă în (1) am fi dat valori lui k începînd cu 1 am fi obținut:

$$2\sqrt{1\,000\,001} - 2 < S < 2\,000,$$

deci $1\,998 < S < 2\,000$ și nu am fi putut răspunde la întrebarea pusă. Problema putea fi formulată și astfel: Să se arate că partea întreagă a sumei S este 1 998.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se demonstreze că diferența dintre un număr natural, scris în baza zece și suma cifrelor acestuia este un multiplu de 9.

2. Suma a k numere naturale consecutive poate fi o putere a lui 2 $(k>1)$?

3. Suma dintre cel mai mare și cel mai mic număr natural, care se poate forma cu patru cifre nenule date este 11 220. Să se afle suma celor patru cifre.

4. Să se calculeze:

a) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 101}$; b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \ldots + \frac{100}{3^{99}}$.

5. Arătați că:

a) $\frac{9}{10}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\ldots\cdot\frac{999\,999}{1\,000\,000} < 0{,}003$; b) $\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{13}\cdot\frac{17}{21}\cdot\ldots\cdot\frac{97}{101} < 0{,}1$.

6. Fie a, b, c trei numere reale. Arătați că cel puțin unul dintre numerele:

$$(a+b+c)^2 - 8ac,\ (a+b+c)^2 - 8bc,\ (a+b+c)^2 - 8ab$$

este pozitiv.

7. Știind că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = b$ să se calculeze, în funcție de a și b, expresia:

$$E = x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + x_2(x_3 + x_4 + x_5) + x_3(x_4 + x_5) + x_4x_5.$$

8. Fie ecuația $x^2 - 3x + 1 = 0$. Să se calculeze $x_1^5 + x_2^5$, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

9. Să se calculeze suma:

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$

10. Cu ce număr natural trebuie să înmulțim numărul 999 999 999 pentru a obține un număr scris numai cu ajutorul cifrei 1?

SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Fie $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, unde $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ sînt cifre, iar $a_n \neq 0$. Avem:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0} - (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0) = a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0 -$$

$$- a_n - a_{n-1} - \ldots - a_1 - a_0 = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \ldots + a_1(10 - 1).$$

Dar $10^k - 1$ este un multiplu de 9, pentru orice număr natural nenul k. Rezultă că toți termenii ultimei sume sînt multipli de 9, deci întreaga sumă este un multiplu de 9. Cu aceasta problema este demonstrată.

2. Fie numerele:

$$a+1,\ a+2,\ \ldots,\ a+k.$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem :

$$S = ka + (1 + 2 + \ldots + k) = ka + \frac{k(k+1)}{2}, \quad ka + \frac{k(k+1)}{2} = 2^p,$$

$$k(2a + k + 1) = 2^{p+1}.$$

Dacă numărul k este par atunci $2a + k + 1$ este impar, iar dacă numărul k este impar atunci $2a + k + 1$ este par. Deci răspunsul este negativ.

3. Fie cifrele nenule $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$. Cel mai mare număr de patru cifre este $\overline{a_4a_3a_2a_1}$, iar cel mai mic $\overline{a_1a_2a_3a_4}$. Avem :

$$\overline{a_4a_3a_2a_1} + \overline{a_1a_2a_3a_4} = 11\,220,$$

sau :

$$1\,000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1 + 1\,000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 = 11\,220,$$

$$1\,001(a_1 + a_4) + 110(a_2 + a_3) = 11\,220. \qquad (1)$$

De aici rezultă că $1\,001(a_1 + a_4)$ trebuie să fie multiplu de 10, deci $a_1 + a_4$ trebuie să fie multiplu de 10. Cum a_1, a_4 sînt cifre nenule există o singură posibilitate : $a_1 + a_4 = 10$. Înlocuind în (1) obținem $10\,010 + 110\,(a_2 + a_3) = 11\,220$, de unde $a_2 + a_3 = 11$. Rezultă că

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10 + 11 = 21.$$

4. a) Să observăm că $\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$,

deci :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Dînd valori lui k de la 1 la 50 și însumînd obținem :

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 101} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{101}\right] = \frac{50}{101}.$$

b) Folosind relația (2) de la problema comentată nr. 6, în care facem $x = \frac{1}{3}$, obținem :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \ldots + \frac{100}{3^{99}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{100}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - \frac{100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{3}} - 1 \text{ etc.}$$

5. Se urmează calea de la problema comentată nr. 5.

a) Fie $N = \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{12} \cdot \ldots \cdot \frac{999\,999}{1\,000\,000}$ și $N' = \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \ldots \cdot \frac{999\,998}{999\,999}$.

Avem $N < N'$, deci $N^2 < N \cdot N' = \frac{9}{1\,000\,000}$, de unde $N < \frac{3}{1\,000} = 0{,}003$.

b) Dacă $N = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{17}{21} \cdot \ldots \cdot \frac{97}{101}$, iar $N' = \frac{5}{9} \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{21}{25} \cdot \ldots \cdot \frac{93}{97}$,

avem $N < N'$, deci $N^2 < N \cdot N' = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}$, deci $N < 0{,}1$.

6. Calculăm suma celor trei numere:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2.$$

Scrisă astfel, observăm că suma celor 3 numere naturale este pozitivă și deci cel puțin unul din numerele date este pozitiv.

7. Avem: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + 2E$, deci $2E = a^2 - b$, adică $E = \frac{1}{2}(a^2 - b)$.

8. Folosim relația de recurență stabilită la problema comentată nr. 9. Se obține 123.

9. Pentru calculul lui S se observă că avem:

$$[(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}] \cdot [(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}] = (k+1)^2 k - k^2(k+1) = k(k+1)(k+1-k) = k(k+1).$$

Amplificînd fracția $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}$ cu $(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}$, obținem:

$$\frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k}}{k(k+1)} - \frac{k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Dînd valori lui k de la 1 la 99 și însumînd, obținem:

$$S = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{99}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

10. Este suficient să găsim un număr natural p, multiplu de 9, care înmulțit cu 999 999 999 să dea un număr scris numai cu ajutorul cifrei 1. Atunci numărul căutat va fi $\frac{p}{9}$.

Să observăm că:

$$999\,999\,999 = 10^9 - 1.$$

În identitatea:

$$x^9 - 1 = (x-1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

îl înlocuim pe x cu 10^9 și obținem:

$$(10^9)^9 - 1 = (10^9 - 1)[(10^9)^8 + (10^9)^7 + \ldots + 10^9 + 1].$$

Cum $10^{81} - 1$ este scris numai cu ajutorul cifrei 9, iar paranteza dreaptă este multiplu de 9, rezultă că $p = (10^9)^8 + (10^9)^7 + \ldots + 10^9 + 1$, deci numărul căutat este:

$$\frac{(10^9)^8 + (10^9)^7 + \ldots + 10^9 + 1}{9},$$

pentru că $\frac{10^{81} - 1}{9}$ se scrie numai folosind cifra 1.

PROBLEME CARE IMPLICĂ NOȚIUNEA DE PARITATE

PROBLEME COMENTATE

1. Fie n un număr natural, mai mare sau cel puțin egal cu 2.

a) Dovediți că 2^n se poate scrie ca o sumă de două numere naturale impare consecutive.

b) Dovediți că 3^n se poate scrie ca o sumă de trei numere naturale consecutive.

Soluție. a) 2^n este număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte:

$$2^n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1} = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-1} + 1).$$

Pentru $n \geqslant 2$, numerele $2^{n-1}-1$ și $2^{n-1}+1$ sînt impare consecutive și deci acestea sînt cele care satisfac problema.

b) Avem $3^n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} + 3^{n-1} + 3^{n-1} = (3^{n-1} - 1) + 3^{n-1} + (3^{n-1} + 1)$.

Pentru $n \geqslant 2$, numerele $3^{n-1}-1$, 3^{n-1} și $3^{n-1}+1$ sînt evident numere naturale consecutive.

Comentarii. 1). Să observăm că $3^n = (3^{n-1}-2) + 3^{n-1} + (3^{n-1}+2)$, deci 3^n se poate scrie ca o sumă de trei numere impare consecutive, pe cînd 2^n nu se poate scrie ca o sumă de două numere naturale consecutive.

2). Să demonstrăm următoarea afirmație:

Oricare ar fi numerele naturale p și n, mai mari strict decît 1, p^n se poate scrie ca o sumă de p numere impare consecutive.

Trebuie să arătăm că există un număr natural k, astfel încît:

$$p^n = (2k+1) + (2k+3) + \ldots + (2k+2p-1),$$

sau:

$$p^n = 2kp + [1 + 3 + \ldots + (2p-1)].$$

Dar la problema comentată nr. 1 de la capitolul „*Sume. Produse*" am arătat că $1+3+\ldots+(2p-1) = p^2$, deci:

$$k = \frac{p(p^{n-2}-1)}{2}.$$

Cum numerele p și $p^{n-2}-1$ $(n > 2)$ sînt de parități diferite înseamnă că cel puțin unul dintre acestea este par, deci k este număr natural. Dacă $n = 2$ se observă că obținem $k = 0$.

Ce condiție trebuie să satisfacă p pentru ca p^n să se poată scrie ca o sumă de p numere naturale consecutive?

2. Fie n un număr natural, mai mare decît 2 și mulțimea:

$$\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Demonstrați că numărul fracțiilor ireductibile din această mulțime este par.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Vom arăta că dacă fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă, atunci și fracția $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă.

Dacă fracția $\frac{k}{n}$ este ireductibilă, atunci cel mai mare divizor comun al numerelor k și n este 1, adică n și k sînt numere prime între ele.

Să demonstrăm că și numerele $n-k$ și n sînt prime între ele, prin metoda reducerii la absurd. Presupunem că există $p \neq 1$ astfel încît $p|n-k$ și $p|n$. Atunci p divide și diferența

$$n-(n-k)=n-n+k=k.$$

Deci $p|n$ și $p|k$ ceea ce contrazice faptul că n și k sînt prime între ele. Rezultă că fracțiile ireductibile sînt în „perechi", deci numărul acestora este par.

Comentariu. Revedeți demonstrația! Este problema complet rezolvată? Am demonstrat că fracțiile ireductibile $\frac{k}{n}$ și $\frac{n-k}{n}$ sînt diferite? Nu! Dacă, însă, am avea $\frac{k}{n}=\frac{n-k}{n}$, atunci $n=2k$, deci fracția $\frac{k}{n}=\frac{k}{2k}$ nu ar mai fi ireductibilă, ceea ce completează demonstrația.

3. Se consideră numerele impare $m, n_1, n_2, \ldots, n_m$. Să se demonstreze că printre numerele:

$$\frac{n_1+n_2}{2}, \frac{n_2+n_3}{2}, \ldots, \frac{n_{m-1}+n_m}{2}, \frac{n_m+n_1}{2}$$

există un număr impar de numere impare.

Soluție. Deoarece suma a două numere impare este un număr par, rezultă că numerele $\frac{n_1+n_2}{2}, \ldots, \frac{n_m+n_1}{2}$ sînt numere naturale.

Să presupunem că printre acestea se află un număr par de numere impare. Atunci suma lor:

$$\frac{n_1+n_2}{2}+\frac{n_2+n_3}{2}+\ldots+\frac{n_m+n_1}{2}=n_1+n_2+\ldots+n_m$$

este un număr par. Pe de altă parte, aceeași sumă, fiind suma unui număr impar de numere impare, este un număr impar. Contradicție! Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci printre numerele din enunț există un număr impar de numere impare.

Comentariu. Pot fi toate numerele impare? Argumentați răspunsul!

4. Fie un număr impar de puncte cu proprietatea că oricare trei sînt necoliniare. Se unesc punctele arbitrar între ele astfel încît prin fiecare trece cel puțin o dreaptă. Demonstrați că există cel puțin un punct din care pornesc un număr par de drepte.

Soluție. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ punctele date. Notăm cu d_k numărul dreptelor care trec prin punctul A_k $(k=1,2,\ldots,2n+1)$.

Să presupunem că toate numerele d_k sînt impare. Atunci $d_1+d_2+\ldots+d_{2n+1}$ este un număr impar. Pe de altă parte, $d_1+d_2+\ldots+d_{2n+1}=2d$, unde d este numărul total de drepte, pentru că fiecare dreaptă a fost numărată de două ori. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci există cel puțin un punct din care pornesc un număr par de drepte.

Comentariu. Este posibil ca numărul punctelor din care pornesc un număr par de drepte să fie par?

Scanned with OKEN Scanner

5. Se poate scrie numărul 1 sub forma :

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\cdots+\frac{1}{n_6},$$

unde $n_1, n_2, \ldots, n_6$ sînt numere naturale impare distincte?

Soluție. Vom arăta că această scriere nu este posibilă. Considerăm cele mai mari șase fracții cu numărătorul 1 și numitori numere impare diferite. Evident că nici un numitor nu poate fi egal cu 1. Suma acestora este :

$$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}.$$

Cum :

$$\frac{1}{3}<0{,}34\ ;\ \frac{1}{5}=0{,}20\ ;\ \frac{1}{7}<0{,}15\ ;\ \frac{1}{9}<0{,}12\ ;\ \frac{1}{11}<0{,}10\ ;\ \frac{1}{13}<0{,}08$$

rezultă :

$$S<0{,}34+0{,}20+0{,}15+0{,}12+0{,}10+0{,}08=0{,}99<1.$$

Evident că pentru alți numitori, mai mari decît cei considerați, S va fi, de asemenea, inferioară lui 1.

Comentarii. 1). Metoda folosită se poate aplica și pentru a arăta că $1\neq\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\ldots+\frac{1}{n_6}+\frac{1}{n_7}$, unde $n_1, n_2, \ldots, n_7$ sînt numere naturale impare, diferite?

2). Există 8 numere impare, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 45, 231 astfel încît :

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\quad\frac{1}{15}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}.$$

Cum $\frac{1}{231}=\frac{1}{3\cdot 77}=\frac{1}{77}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{45}\right)$ rezultă că 1 se poate scrie ca o sumă de 10 fracții cu proprietatea cerută. În general :

$$\frac{1}{5n}+\frac{1}{9n}+\frac{1}{45n}=\frac{1}{3n},$$

deci 1 se poate scrie ca o sumă de 13 fracții cu proprietatea cerută, dacă luăm $n=15\cdot 77$. Poate continua procedeul?

3). Dacă nu s-ar fi cerut ca numitorii să fie numere impare există o multitudine de scrieri ale lui 1. De exemplu :

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{18}+\frac{1}{45}+\frac{1}{90}.$$

4). Comparați cu problema comentată nr. 13 de la capitolul „*Sume. Produse*".

6. Să se determine suma numerelor pare, cuprinse între n^2-n+1 și n^2+n+1, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție. Produsul a două numere naturale consecutive este întotdeauna un număr par, deci numerele $n^2-n+1=n(n-1)+1$ și $n^2+n+1=n(n+1)+1$ sînt numere impare.

Scanned with OKEN Scanner

Cel mai mic număr par, cuprins între numerele date este $n^2 - n + 2$, iar cel mai mare este $n^2 + n$. Avem de calculat suma :

$$S = (n^2 - n + 2) + (n^2 - n + 4) + (n^2 - n + 6) + \ldots + (n^2 + n - 2) + (n^2 + n) =$$

$$= (n^2 - n) + 2 + (n^2 - n) + 4 + (n^2 - n) + 6 + \ldots + (n^2 - n) + (2n - 2) + (n^2 - n) + (2n).$$

Cum numărul numerelor pare, cuprinse între numerele date este n (de ce?) avem :

$$S = n(n^2 - n) + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = n(n^2 - n) + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= n(n^2 - n + n + 1) = n(n^2 + 1).$$

Comentariu. Calculați suma numerelor impare, strict mai mari decît $n^2 - n + 1$ și strict mai mici decît $n^2 + n + 1$.

7. Fie n numere naturale, nenule și distincte ($n > 2$), avînd suma $n^2 + n - 2$.

a) Demonstrați că printre acestea există cel puțin două numere impare.

b) Pot fi toate impare?

Soluție. a) Existența unui singur număr impar este exclusă pentru că suma ar trebui să fie, în acest caz, un număr impar, iar $n^2 + n - 2 = n(n+1) - 2$ este un număr par.

Într-adevăr, $n(n+1)$ este par, iar diferența a două numere pare este un număr par. Să presupunem că nici unul dintre numere nu este impar. Fie $S = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ suma celor mai mici n numere pare, distincte și nenule. Avem :

$$S = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) = n^2 + n > n^2 + n - 2.$$

De aici rezultă că cel puțin două numere sînt impare.

Comentariu. Putem realiza următorul model : în suma S înlocuim termenii $2k$ și $2p$ prin $2k - 1$ și $2p - 1$, $k,\ p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ și $k \neq p$.

Să observăm că numărul numerelor impare trebuie să fie par.

b) Dacă n este impar, atunci cel puțin unul dintre numere trebuie să fie par pentru ca suma să fie pară. Rezultă că, pentru n impar, nu toate numerele pot fi impare. Dacă n este par, să observăm că :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

iar :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) = (n - 1)^2.$$

Dar :

$$n^2 + n - 2 - (n - 1)^2 = n^2 + n - 2 - n^2 + 2n - 1 = 3n - 3 = 3(n - 1).$$

Cum n este par, rezultă că $3(n - 1)$ este impar, deci putem realiza următorul model cu toate numerele impare :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + 3(n - 1) = n^2 + n - 2.$$

Comentariu. Problema cerea ca numerele să fie distincte. Trebuie deci să mai arătăm că în modelul prezentat toate numerele sînt distincte. Este suficient să arătăm că $3(n - 1) > 2n - 3$, ceea ce se verifică imediat.

8. Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul natural n pentru ca să existe n numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egale cu $+1$ sau cu -1, cu proprietatea că :

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0\ ?$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. În sumă sînt n termeni, deci $\frac{n}{2}$ dintre aceștia trebuie să fie $+1$, iar restul de $\frac{n}{2}$ să fie -1. Rezultă, cu necesitate, că n trebuie să fie par. Fie $n = 2p$. Să arătăm că această condiție nu este suficientă. Contraexemplu: pentru $p = 1$, deci $n = 2$, avem $a_1a_2 + a_2a_1 = 2a_1a_2 \neq 0$.

Să calculăm, în două moduri, produsul termenilor din suma dată.

Pe de o parte:

$$(a_1a_2)(a_2a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1}a_n)(a_na_1) = a_1^2a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_n^2 = +1. \tag{1}$$

Pe de altă parte, avînd în vedere că p termeni din suma dată sînt egali cu $+1$, iar p termeni sînt egali cu -1, obținem:

$$(a_1a_2) \cdot (a_2a_3) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1}a_n) \cdot (a_na_1) = (+1)^p \cdot (-1)^p. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă $(+1)^p \cdot (-1)^p = +1$, deci p trebuie să fie număr par. Dacă $p = 2k$ obținem $n = 4k$. Rămîne că răspunsul este: n trebuie să fie multiplu de 4.

Comentariu. Pentru ca problema să fie complet rezolvată trebuie să dăm și un model de realizare a ei. Dacă numerotăm la întîmplare $2k$ numere egale cu $+1$ și $2k$ numere egale cu -1 cu $a_1, a_2, \ldots, a_{4k}$ nu este îndeplinită întotdeauna condiția:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{4k}a_1 = 0.$$

Verificați pentru $a_1 = a_2 = 1$ și $a_3 = a_4 = -1$.

Un model este următorul:

$$a_1 = a_4 = a_5 = a_8 = a_9 = \ldots = a_{4k-3} = a_{4k} = +1,$$

$$a_2 = a_3 = a_6 = a_7 = a_{10} = \ldots = a_{4k-2} = a_{4k-1} = -1.$$

Este singurul?

9. Pentru ce valori ale numărului natural n, din egalitatea:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c},$$

rezultă egalitatea:

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n},$$

cînd numitorii sînt nenuli?

Soluție. Relația dată se mai poate scrie:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc;\ a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 = abc;\ a^2(b+c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + bc(b+c) = 0;\ (b+c)[a^2 + a(b+c) + bc] = 0;$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 0.$$

De aici, $a = -b$ sau $b = -c$ sau $c = -a$.

Înlocuind, de exemplu, pe a cu $-b$ în a doua relație, obținem:

$$\frac{1}{(-b)^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{(-b)^n + b^n + c^n}.$$

Aceasta este evident adevărată numai dacă n este impar. Analog pentru $b = -c$ sau $c = -a$.

Comentariu. Enunțul nu specifică cărei mulțimi aparțin numerele a, b, c. Pentru ca problema să fie posibilă, a, b și c trebuie să aparțină unei mulțimi care conține cel puțin două numere opuse.

Scanned with OKEN Scanner

10. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația :

$$2^x + 2^y + 2^z = 2\,336,$$

unde $x < y < z$.

Soluție. Să observăm că $2336 = 2^5 \cdot 73$. Ecuația se mai poate scrie :

$$2^x(1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}) = 2^5 \cdot 73.$$

Avînd în vedere că $x < y < z$ rezultă că $1 + 2^{y-x} + 2^{z-x}$ este un număr impar, deci :

$$2^x = 2^5, \quad 1 + 2^{y-x} + 2^{z-x} = 73.$$

De aici rezultă că $x = 5$, iar $2^{y-5} + 2^{z-5} = 72$. Cum $y < z$ avem $y - 5 < z - 5$ și deci, din :

$$2^{y-5}(1 + 2^{z-y}) = 2^3 \cdot 9,$$

rezultă $2^{y-5} = 2^3$, $y - 5 = 3$, $y = 8$ și $1 + 2^{z-8} = 9$, de unde $2^{z-8} = 8$ și deci $z - 8 = 3$, adică $z = 11$.

Soluția ecuației, în condițiile cerute este, deci, tripletul (5, 8, 11).

Comentarii. 1). Orice număr natural nenul n se poate scrie sub forma $n = 2^p(2q + 1)$, unde p și q sînt numere naturale (deci pot lua și valoarea 0).

2). Condiția $x < y < z$ a simplificat foarte mult problema. Dacă nu s-ar fi impus această ordine ar fi trebuit analizate cazurile :

a) $x = y = z$, adică $3 \cdot 2^x = 2\,336$. Ecuația nu are soluții pentru că $x \in \mathbb{N}$, iar 2 336 nu este multiplu de 3.

b) Dacă două și numai două dintre necunoscute ar fi egale, de exemplu $x = y \neq z$, am avea :

$$2 \cdot 2^x + 2^z = 2^5 \cdot 73.$$

Presupunînd $x + 1 < z$ obținem $2^{x+1}(1 + 2^{z-x-1}) = 2^5 \cdot 73$, de unde $x + 1 = 5$, adică $x = 4$ și $1 + 2^{z-5} = 73$, de unde $2^{z-5} = 72$. Cum 72 nu este o putere a lui 2, nici în acest caz ecuația nu are soluție.

c) Dacă $x \neq y \neq z \neq x$ atunci ecuația are șase soluții :
(5, 8, 11), (5, 11, 8), (8, 5, 11), (8, 11, 5), (11, 5, 8), (11, 8, 5).

11. Polinomul $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ are toți coeficienții numere întregi. Dacă $P(0)$ și $P(1)$ sînt numere impare, demonstrați că polinomul nu se anulează pentru nici un număr întreg.

Soluție. Din ipoteză rezultă că $a_0 = 2k + 1$, iar $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 2p + 1$.

Vom demonstra prin reducere la absurd. Să presupunem că există $x_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încît $P(x_0) = 0$.

Dacă x_0 este par atunci x_0^k este par și $a_kx_0^k$ este, de asemenea, număr par ($k = 1, 2, \ldots, n$). Mai mult, $a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0$ este o sumă de numere pare, deci este număr par. Cum a_0 este impar, suma $(a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0) + a_0$, fiind formată dintr-un număr par și unul impar, este un număr impar și deci nu poate fi egală cu 0.

Dacă x_0 este impar atunci x_0^k este impar, iar $a_kx_0^k$ are aceeași paritate cu a_k. De aici rezultă că :

$$a_nx_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0$$

are aceeași paritate cu $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1$, dar această sumă este pară. Într-adevăr, cum $a_0 = 2k + 1$, iar $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 2p + 1$, rămîne că $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1$ este număr par. Deci, și în acest caz, $P(x_0)$ este o sumă dintre un număr par și unul impar și nu poate fi 0.

Scanned with OKEN Scanner

Comentarii. 1). Se poate demonstra că, dacă un polinom cu coeficienți întregi admite o rădăcină întreagă, aceasta divide termenul liber. Folosind acest rezultat, presupunerea că x_0 este par nu ar mai fi necesară.

2). Dacă $P(X)$ are coeficienți întregi și dacă se divide cu $X - x_0$, $x_0 \in \mathbb{Z}$, atunci citul împărțirii este un polinom $Q(X)$ cu coeficienți întregi. Presupunem că $x_0 \in \mathbb{Z}$ este rădăcină a polinomului dat. În $P(X) = (X - x_0)Q(X)$ înlocuim X cu 0 și apoi cu 1 și obținem:

$$P(0) = -x_0 Q(0),$$

$$P(1) = (1 - x_0)Q(1).$$

Cum $-x_0$ și $1 - x_0$ sînt de parități diferite, ar trebui ca cel puțin unul dintre numerele $P(0)$ și $P(1)$ să fie par. Dar, conform ipotezei, $P(0)$ și $P(1)$ sînt ambele impare, deci contradicție. Am demonstrat, deci, în alt mod, cerința problemei.

12. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți numere întregi. Dacă $P(1) = P(2) = 0$, arătați că $P(k)$ este un număr întreg par, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Soluție. Dacă $P(1) = 0$ rezultă că polinomul dat se divide cu $X - 1$ apoi, din $P(2) = 0$, rezultă că polinomul se divide și cu $X - 2$. Cum $X - 1$ și $X - 2$ sînt prime între ele rezultă că $P(X)$ se divide cu produsul lor. Există, deci, un polinom $Q(X)$ cu coeficienți întregi astfel încît:

$$P(X) = (X - 1)(X - 2) \cdot Q(X). \tag{1}$$

Înlocuind nedeterminata X prin $k \in \mathbb{Z}$ avem:

$$P(k) = (k - 1)(k - 2) \cdot Q(k).$$

Dar $Q(k)$ este un număr întreg. Dacă numărul k este par, atunci factorul $k - 2$ este par, deci $P(k)$ este par. Dacă numărul k este impar, atunci factorul $k - 1$ este par, deci $P(k)$ este par. Rezultă că, pentru orice număr k întreg, $P(k)$ este un număr par.

Comentariu. În demonstrație esențial nu a fost faptul că 1 și 2 sînt numere întregi consecutive, ci faptul că acestea au parități diferite. Problema se poate extinde astfel:

Dacă polinomul $P(X)$, cu coeficienți întregi, admite două rădăcini întregi de parități diferite, atunci $P(k)$ este un număr par pentru orice număr k întreg.

13. Fie un tablou cu m linii și n coloane completat numai cu elementele -1 și $+1$, astfel încît produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este -1. Să se arate că numerele m și n nu pot fi de parități diferite.

Soluție Pentru m și n de aceeași paritate, un astfel de tablou există. De exemplu, pentru $m = 3$ și $n = 5$:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Acest tablou verifică condiția că produsul elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană este -1.

Să presupunem că se poate completa un astfel de tablou și în cazul în care m și n sînt de parități diferite. Presupunem m par și n impar. În tablou sînt mn elemente. Să calculăm produsul p al celor mn elemente în două moduri.

Știm că produsul elementelor de pe fiecare linie este -1. Atunci:

$$p = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{\text{de } m \text{ ori}} = (-1)^m = +1.$$

Analog, produsul elementelor de pe fiecare coloană fiind tot -1, avem:

$$p = \underbrace{(-1) \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-1)}_{\text{de } n \text{ ori}} = (-1)^n = -1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Contradicție! Analog se demonstrează imposibilitatea și pentru m impar și n par. Cu aceasta am răspuns complet la întrebarea problemei.

Comentarii. 1). Dacă am fi încercat să completăm un astfel de tablou, de exemplu pentru $m = 3$ și $n = 2$, evident că nu am fi reușit, dar aceasta nu ar fi însemnat că am demonstrat imposibilitatea cerută.

2). Pentru a obține tablouri cu proprietatea cerută în cazul cînd m și n sînt de aceeași paritate putem proceda astfel: completăm la întîmplare cu elementele -1 și $+1$ un tablou avînd $m-1$ linii și $n-1$ coloane. Linia numărul m o completăm cu $+1$, respectiv -1 după cum produsul elementelor de pe fiecare coloană a tabloului cu $m-1$ linii și $n-1$ coloane este -1, respectiv $+1$. Analog completăm coloana a n-a. Paritatea numărului elementelor egale cu -1 din primele $n-1$ elemente ale liniei a m-a este aceeași cu paritatea numărului elementelor egale cu -1 din primele $m-1$ elemente ale coloanei a n-a.

Rămîne de completat tabloul cu elementul aflat la intersecția liniei a m-a cu coloana a n-a. Acesta va fi egal cu $+1$ dacă numărul elementelor egale cu -1 din primele $n-1$ elemente ale coloanei a m-a este impar sau cu -1 dacă acest număr este par.

3). Există oare oricîte tablouri cu proprietatea cerută în cazul în care m și n au aceeași paritate? Evident, nu! Se poate demonstra că numărul acestor tablouri este $2^{(m-1)(n-1)}$.

14. Se consideră un tablou cu n linii și n coloane, cu elemente 0 și 1, construit astfel: la intersecția liniei i cu coloana j se scrie 1 dacă i divide pe j și 0 dacă i nu divide pe j pentru orice $1 \leqslant i \leqslant n$ și $1 \leqslant j \leqslant n$.

Dacă p este un număr natural dat, să se determine cea mai mare valoare a lui n astfel încît să existe p coloane cu proprietatea că suma elementelor de pe fiecare dintre ele este un număr impar.

Soluție. Pentru a putea aborda mai ușor problema să construim un astfel de tablou pentru $n = 5$:

linia 1 va fi 1 1 1 1 1 pentru că 1 divide orice număr;

linia 2 va fi 0 1 0 1 0 pentru că 2 divide pe 2 și pe 4, dar nu divide pe 1, 3, și 5;

repetînd raționamentul obținem, în final, tabloul:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad (1)$$

Să observăm că numai pe coloanele 1 și 4 suma elementelor de pe fiecare din ele este un număr impar.

De fapt, suma elementelor de pe coloana j reprezintă numărul de divizori naturali ai numărului j. Dar singurele numere naturale cu un număr impar de divizori naturali sînt pătratele perfecte (vezi problema comentată nr. 4 de la capitolul *„Pătrate perfecte"*).

Problema cere să existe exact p pătrate perfecte în mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Rezultă că $p^2 \leqslant n < (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$. Cum n trebuie să fie cel mai mare obținem $n = p^2 + 2p$.

Comentarii. 1). În cazul particular $p = 2$ tabloul (1) mai poate fi completat cu 3 linii și 3 coloane fără ca pe altă coloană, în afara coloanelor 1 și 4, suma elementelor să fie număr impar.

2). Un element oarecare al tabloului poate fi notat cu a_{ij} și înseamnă că acest element se află la intersecția liniei i cu coloana j.

În cazul nostru:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \text{ divide } j \\ 0, & \text{dacă } i \text{ nu divide } j \end{cases} \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PROPUSE

1. Un număr de 3 cifre, divizibil cu 77, are toate cifrele pare. Să se afle acest număr.

2. Arătați că suma a n numere naturale impare consecutive ($n > 1$) nu poate fi un număr prim.

3. Fie n un număr natural impar, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere întregi, iar $b_1, b_2, \ldots, b_n$ aceleași numere în altă ordine. Arătați că numerele:

$$N_1 = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)$$

și:

$$N_2 = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n - b_n)$$

sînt numere pare.

4. Într-unul din pătratele unei table de șah este scris numărul $+1$, iar în celelalte -1. Înțelegem prin „mutare" schimbarea tuturor semnelor numerelor dintr-o linie sau dintr-o coloană oarecare. Să se arate că oricîte mutări am efectua, nu putem obține $+1$ în toate pătratele tablei.

5. Să se demonstreze că diferența $a^3 - b^3$ formată din cuburile numerelor întregi impare a și b se divide cu 2^n, dacă și numai dacă $(a - b)$ se divide cu 2^n.

6. La o consfătuire s-au întîlnit n persoane, dar nu fiecare a dat mîna cu toate celelalte. Să se arate că numărul celor care au dat mîna de un număr impar de ori este par.

7. Fie p numărul divizorilor naturali ai numărului $N_1 = n^4 - 4n^3 + 8n^2 - 8n + 3$ ($n \in \mathbb{N} - \{1\}$), iar q numărul divizorilor naturali ai numărului $N_2 = N_1 + 1$. Să se demonstreze că $p + q$ este un număr impar.

8. Arătați că:

1) numărul $\overline{\underbrace{11\ldots1}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{55\ldots5}_{\text{de } n \text{ ori}}}$ poate fi scris ca un produs de două numere impare consecutive;

2) numărul $\overline{\underbrace{44\ldots4}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{88\ldots8}_{\text{de } n \text{ ori}}}$ poate fi scris ca un produs de două numere pare consecutive;

3) numărul $\overline{\underbrace{44\ldots4}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{22\ldots2}_{\text{de } n \text{ ori}}}$ poate fi scris ca un produs de două numere consecutive.

9. Găsiți toate numerele de 3 cifre alcătuite din cifre pare și divizibile prin produsul cifrelor respective.

10. Arătați că ecuația $x^2 - 2y^2 + 8z - 3 = 0$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

11. Există polinoame P de gradul trei, cu coeficienți întregi, astfel încît $P(1)=1$ și $P(3)=4$? Dar astfel încît $P(7) = 5$ și $P(15) = 9$? Condiția ca polinoamele să fie de gradul trei este esențială?

12. Demonstrați că, fiind dat un număr natural nenul n, există un număr natural avînd n cifre, divizibil cu 5^n, care se scrie numai cu cifre impare.

SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Din faptul că 77 divide pe $\overline{abc}$ rezultă că 11 divide pe $100a + 10b + c = 99a + 11b + a - b + c = 11(9a + b) + a - b + c$. Trebuie deci ca $a - b + c$ să fie multiplu de 11. Deoarece a, b și c sînt cifre pare, singura posibilitate este $a - b + c = 0$, adică $b = a + c$.

Numărul căutat devine $\overline{a(a+c)c} = 100a + 10(a + c) + c = 11(10a + c)$. Dar $10a + c$ trebuie să fie multiplu de 7, iar $a + c$ trebuie să fie cifră. Analizînd cazurile posibile găsim $a = 4$ și $c = 2$. Deci numărul căutat este 462.

2. Avem $(2k+1) + (2k+3) + \ldots + (2k+2n-1) = 2nk + [1 + 3 + \ldots + (2n-1)] = 2nk + n^2 = n(2k + n)$. Cum $n > 1$ rezultă că suma dată se divide cel puțin prin n și cum $n(2k + n) > n$ rezultă că suma dată nu este număr prim.

3. Problema constituie o generalizare a problemei comentate nr. 9 de la capitolul *„Principiul cutiei"*. Trebuie să arătăm că cel puțin un factor al lui N_1 este număr par. Presupunem că toți factorii sînt impari. Dar suma lor este $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, deci număr par. Pe de altă parte, suma unui număr impar de numere impare este un număr impar. Contradicție! Analog pentru N_2.

Scanned with OKEN Scanner

4. După fiecare „*mutare*", paritatea numărului de semne „+" de pe tablă rămîne aceeași. Într-adevăr, să presupunem că înainte de o mutare pe linia (sau coloana) respectivă avem a semne „+" și b semne „−". După „mutare", pe linia (coloana) considerată vom avea a semne „−" și b semne „+". Deoarece $a + b = 8$ rezultă că a și b au aceeași paritate, deci paritatea numărului de semne „+" este aceeași.

Așadar pe tablă se va afla mereu un număr impar de semne „+", deci niciodată nu vom putea obține $+1$ în toate cele 64 de pătrățele ale tablei de șah.

5. Dacă $a - b$ se divide cu 2^n, cum $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, rezultă că 2^n divide pe $a^3 - b^3$.

Reciproc: 2^n divide pe $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Dar $a^2 + ab + b^2$ este număr impar pentru a și b impari. Rezultă că 2^n divide pe $a - b$.

6. Cînd o persoană dă mîna cu o altă persoană se realizează două strîngeri de mînă, deci numărul total al strîngerilor de mînă este par ($2s$). Avem, deci:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 2s, \qquad (*)$$

unde p_k reprezintă numărul strîngerilor de mînă pe care le-a realizat persoana cu numărul de ordine k.

Printre cele n persoane sînt i persoane care au realizat fiecare cîte un număr par de strîngeri de mînă și $n - i$ persoane care au realizat fiecare cîte un număr impar de strîngeri de mînă. Putem reorganiza în suma (*) termenii astfel:

$$\underbrace{p_1' + p_2' + \ldots + p_i'}_{i \text{ numere pare}} + \underbrace{p_{i+1}' + p_{i+2}' + \ldots + p_n'}_{n-i \text{ numere impare}} = 2s.$$

Suma formată din i numere pare și $(n - i)$ numere impare este un număr par dacă și numai dacă numărul numerelor impare este par, deci $n - i$ par.

7. Se observă că $N_2 = (n^2 - 2n + 2)^2$, iar $N_1 = (n^2 - 2n + 2)^2 - 1$.

Cum N_2 are un număr impar de divizori naturali, iar N_1 are un număr par de divizori pentru că nu poate fi pătrat perfect rezultă că $p + q$ este impar (este bine să se revadă problemele comentate nr. 4 și nr. 9 de la capitolul „*Pătrate perfecte*").

8. Fie numărul:

$$N = \underbrace{\overline{aa\ldots a}}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{\overline{bb\ldots b}}_{\text{de } n \text{ ori}} = a(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1)\cdot 10^n + b(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots +$$

$$+ 10 + 1) = a\cdot\frac{10^n - 1}{10 - 1}\cdot 10^n + b\cdot\frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{3}\left(\frac{a\cdot 10^n + b}{3}\right) =$$

$$= \frac{10^n - 1}{3}\left(\frac{a(10^n - 1)}{3} + \frac{a + b}{3}\right).$$

1) Pentru $a = 1$, $b = 5$ avem:

$$N = \underbrace{\overline{11\ldots 1}}_{\text{de } n \text{ ori}}\ \underbrace{\overline{55\ldots 5}}_{\text{de } n \text{ ori}} = \frac{10^n - 1}{3}\left(\frac{10^n - 1}{3} + 2\right) = \underbrace{\overline{33\ldots 33}}_{\text{de } n \text{ ori}}\cdot\underbrace{\overline{33\ldots 35}}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}.$$

2) Pentru $a = 4$, $b = 8$ avem:

$$N = \frac{10^n - 1}{3}\left(\frac{4\cdot(10^n - 1)}{3} + 4\right) = \frac{2}{3}\cdot(10^n - 1)\cdot\left(\frac{2}{3}(10^n - 1) + 2\right) =$$

$$= \underbrace{\overline{66\ldots 66}}_{\text{de } n \text{ ori}}\cdot\underbrace{\overline{66\ldots 68}}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

3) Pentru $a = 4$ și $b = 2$ avem:

$$N = \frac{10^n - 1}{3}\left(\frac{4 \cdot (10^n - 1)}{3} + 2\right) = \frac{2}{3} \cdot (10^n - 1) \cdot \left(\frac{2}{3}(10^n - 1) + 1\right) =$$

$$= \underbrace{\overline{66 \ldots 66}}_{\text{de } n \text{ ori}} \cdot \underbrace{\overline{66 \ldots 67}}_{\text{de } n-1 \text{ ori}}.$$

9. Un număr de 3 cifre este de forma $\overline{abc}$. Cum a, b, c sînt cifre pare rezultă $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$, unde x, y, z aparțin mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, iar $x \neq 0$. Cifrele x, y sau z nu pot fi mai mari ca 4 pentru că, în acest caz, a, b sau c nu ar mai fi cifre.

Avem:

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 2x \cdot 100 + 2y \cdot 10 + 2z = 2(x \cdot 100 + y \cdot 10 + z) = 2 \cdot \overline{xyz}.$$

Cum a, b și c sînt pare rezultă că produsul cifrelor acestora este un multiplu de 8 deci, conform cerinței problemei, 8 divide pe $2 \cdot \overline{xyz}$, adică 4 divide de $\overline{xyz}$. Dar $\overline{xyz} = 100x + \overline{yz}$. De aici rezultă, pentru că $100x$ se divide cu 4, că $\overline{yz}$ trebuie să fie un multiplu de 4. Avînd în vedere că $z \leqslant 4$, $y \leqslant 4$ avem:

$$\overline{yz} \in \{12, 24, 32, 44\}.$$

Rămîne să analizăm fiecare din aceste patru cazuri posibile.

1) Din $\overline{yz} = 12$ rezultă $\overline{abc} = \overline{a24}$. Cum a este par rezultă că $a \cdot b \cdot c$ este multiplu de 16. De aici avem $a = 2$ sau $a = 6$. Numerele 224 și 624 sînt printre cele căutate.

2) Din $\overline{yz} = 24$, rezultă $\overline{abc} = \overline{a48}$. Cum a este par, produsul $a \cdot 4 \cdot 8 = 32a$ este multiplu de 64, deci 64 divide $\overline{a48}$. Se arată că numai pentru $a = 4$ numărul 64 divide pe $\overline{a48}$ dar, în acest caz, $4 \cdot 4 \cdot 8 = 128$ nu divide pe 448.

3) Dacă $\overline{yz} = 32$, avem $\overline{abc} = \overline{a64}$, deci 48 divide pe $\overline{a64}$, adevărat numai pentru $a = 8$, dar $8 \cdot 6 \cdot 4 = 192$ nu divide pe 864.

4) În sfîrșit, dacă $\overline{yz} = 44$ rezultă că $\overline{abc} = \overline{a88}$, deci 128 trebuie să dividă $\overline{a88}$, dar $\overline{a88}$ nu este multiplu de 128 pentru $a \in \{2, 4, 6, 8\}$. Rămîne că singurele soluții ale problemei sînt numerele 224 și 624.

10. Presupunem că ecuația are soluții în mulțimea numerelor întregi. Atunci, cu necesitate, x este impar. Fie $x = 2k + 1$ și obținem:

$$4k^2 + 4k + 1 - 2y^2 + 8z - 3 = 0,$$

de unde $2k^2 + 2k - y^2 + 4z - 1 = 0$. De aici rezultă că y trebuie să fie, cu necesitate, număr impar. Fie $y = 2p + 1$. Avem:

$$2k^2 + 2k - 4p^2 - 4p - 1 + 4z - 1 = 0,$$

sau:

$$2k^2 + 2k + 4z = 4p^2 + 4p + 2,$$

adică:

$$k^2 + k + 2z = 2p^2 + 2p + 1.$$

Cum $k(k + 1) + 2z$ este număr par, iar $2p(p + 1) + 1$ este impar rezultă că egalitatea este imposibilă.

11. Fie $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Fie a și b două numere întregi. Atunci:

$$P(a) - P(b) = a_3(a^3 - b^3) + a_2(a^2 - b^2) + a_1(a - b) =$$

$$= (a - b)[a_3(a^2 + ab + b^2) + a_2(a + b) + a_1].$$

Scanned with OKEN Scanner

Evident, ambii factori ai acestui produs sînt numere întregi. Notînd paranteza dreaptă cu $Q(a, b)$, pentru $a = 3$ și $b = 1$ obținem:

$$P(3) - P(1) = (3 - 1)Q(3, 1)$$

sau:

$$4 - 1 = 2 \cdot Q(3, 1); \quad 3 = 2Q(3, 1). \tag{1}$$

Cum $Q(3, 1)$ este număr întreg avem $2Q(3, 1)$ număr par. Egalitatea (1) este, deci, imposibilă. Analog, pentru $a = 15$ și $b = 7$ avem:

$$P(15) - P(7) = (15 - 7) \cdot Q(15, 7)$$

sau:

$$9 - 5 = 8Q(5, 7); \quad 4 = 8Q(5, 7); \quad 1 = 2Q(5, 7),$$

deci din nou imposibilitate.

Rezultatele rămîn valabile pentru polinoame cu coeficienți întregi de orice grad n.

12. Se observă că, pentru n număr natural dat, există un număr N avînd n cifre care să fie multiplu de 5^n (5^n nu are mai mult de n cifre și în cazul în care are mai puține completăm la dreapta cu zerouri).

Avem, deci:

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k \ldots a_1}$$

un multiplu al lui 5^n de n cifre. Numărul N poate conține, evident, și numere pare. Vom încerca să transformăm numărul N într-un număr care conține numai cifre impare.

Pentru a transforma o cifră pară a_k într-o cifră impară astfel încît numărul obținut să rămînă multiplu de 5^n adunăm la N numărul $5^n \cdot 10^{k-1}$. Deoarece a k — a cifră a numărului $5^n \cdot 10^{k-1}$ este 5, în loc de a_k vom obține $a_k + 5$ (sau $a_k + 5 - 10$, dacă $a_k \geqslant 5$), adică o cifră impară. Începem această operație cu cifra pară de rang minim. Procedăm analog cu celelalte cifre pare de rang superior (obținute, eventual, pe parcurs) pînă la cifra de rang $n-1$, avînd în vedere că n este finit, după un număr finit de pași, toate cifrele de rang mai mic sau egal cu $n - 1$ devin impare. Obținem un multiplu al lui 5^n de forma:

$$k\overline{a'_n a'_{n-1} \ldots a'_1},$$

în care toate cifrele $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}, a'_n$ sînt impare, iar k este un număr avînd cifrele de paritate oarecare.

Scăzînd din acest număr numărul $k \cdot 10^n$ (și el multiplu de 5^n), obținem numărul $\overline{a'_n a'_{n-1} \ldots a'_1}$ care are proprietățile cerute.

MULȚIMI. PARTIȚII ALE UNEI MULȚIMI

Considerăm cunoscute definițiile reuniunii și intersecției a două mulțimi.

Prin *diferența* a două mulțimi A și B înțelegem mulțimea formată din acele elemente ale lui A care nu se află în B. Deci $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ și } x \notin B\}$. Dacă se dă o mulțime E și A o submulțime a sa, mulțimea $E \setminus A$ se numește *complementara* mulțimii A în raport cu mulțimea E.

Se numește *partiție* a unei mulțimi E o mulțime de submulțimi nevide ale lui E, disjuncte două cîte două, a căror reuniune este mulțimea A.

De exemplu, pentru mulțimea $E = \{1, 2, 3\}$ există următoarele partiții:

a) $\{1\}, \{2\}, \{3\}$; c) $\{2\}, \{1, 3\}$;

b) $\{1\}, \{3, 2\}$; d) $\{3\}, \{1, 2\}$.

Evident că submulțimile A și $E \setminus A$, cu $A \neq \emptyset$, $A \neq E$, reprezintă o partiție a mulțimii E. Să reținem că dacă mulțimea E are n elemente, atunci aceasta are 2^n submulțimi.

Mulțimea submulțimilor unei mulțimi nu reprezintă o partiție a acesteia pentru că nu toate sînt disjuncte două cîte două.

Cînd vorbim despre *împărțirea* unei mulțimi în două submulțimi disjuncte înțelegem o partiție a mulțimii respective.

PROBLEME COMENTATE

1. Fie mulțimea $E = \{0, 1\}$. Determinați toate submulțimile acestei mulțimi și apoi arătați că reuniunea și intersecția oricăror două submulțimi ale lui E este tot o submulțime a lui E.

Soluție. Vom avea $2^2 = 4$ submulțimi: $\emptyset$, $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $E = \{0, 1\}$.

În tabelul (1) este reprezentată reuniunea oricăror două submulțimi. La intersecția liniei corespunzătoare unei submulțimi cu coloana corespunzătoare alteia se află rezultatul reuniunii submulțimilor respective.

„∪"	$\emptyset$	A	B	E
$\emptyset$	$\emptyset$	A	B	E
A	A	A	E	E
B	B	E	B	E
E	E	E	E	E

Tabel 1

„∩"	$\emptyset$	A	B	E
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
A	$\emptyset$	A	$\emptyset$	A
B	$\emptyset$	$\emptyset$	B	B
E	$\emptyset$	A	B	E

Tabel 2

Analog, în tabelul (2) este reprezentată intersecția submulțimilor. Se observă că reuniunea și intersecția oricăror două submulțimi ale lui E este tot o submulțime a lui E.

Comentarii. 1). Mulțimea submulțimilor unei mulțimi E se mai numește și *mulțimea părților* mulțimii E și se notează cu $\mathcal{P}(E)$.

2). Dacă A și B sînt două mulțimi, numim *diferență simetrică* a lor și o notăm cu „Δ" (delta) mulțimea:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $E = \{0, 1\}$, atunci $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, A, B, E\}$, unde $A = \{0\}$ și $B = \{1\}$. Să calculăm diferența simetrică a elementelor lui $\mathcal{P}(E)$. Rezultatele sînt date în tabelul (3).

Δ	$\emptyset$	A	B	E
$\emptyset$	$\emptyset$	A	B	E
A	A	$\emptyset$	E	B
B	B	E	$\emptyset$	A
E	E	B	A	$\emptyset$

Tabel 3

Se observă că $A \setminus B \neq B \setminus A$, pentru $A \neq \emptyset \neq B$, iar $A \Delta B = B \Delta A$.

2. Să se arate că, oricum am împărți mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ în două submulțimi disjuncte, una dintre acestea va conține două elemente a căror diferență este un element al aceleiași submulțimi.

Soluție. Presupunem că este posibilă o împărțire a lui E în două submulțimi disjuncte care să nu satisfacă cerința problemei. Să încercăm să construim efectiv un exemplu:

Elementele 1 și 2 nu pot fi în aceeași submulțime deoarece $2 - 1 = 1$. De asemenea, 4 și 2 nu pot fi în aceeași submulțime pentru că $4 - 2 = 2$. Rezultă de aici că 1 și 4 sînt în aceeași submulțime. Neapărat, $4 - 1 = 3$ nu trebuie să fie în aceeași submulțime cu 1 și 4 deci 3 se află în aceeași submulțime cu 2. Avem pînă acum: $A \supseteq \{1, 4\}$, $B \supseteq \{2, 3\}$. A rămas elementul 5. Acesta nu poate fi în submulțimea A pentru că $5 - 4 = 1$, și nici în submulțimea B pentru că $5 - 3 = 2$. Rămîne că presupunerea făcută este falsă.

Comentariu. Pentru că numărul elementelor mulțimii E este 5, deci un număr destul de mic, s-ar fi putut rezolva problema și prin verificare directă.

Trebuiau scrise cele $2^5 = 32$ submulțimi ale lui E și apoi se considerau cele 16 perechi de forma $(M, E \setminus M)$ și în fiecare caz se verifică faptul că M sau $E \setminus M$ conține două elemente a căror diferență aparține aceleiași submulțimi.

Comparînd cele două metode este clar că prima este mult mai „elegantă".

3. Fie mulțimea $E = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 97, 100\}$ și o submulțime A a lui E formată din 19 elemente distincte. Să se arate că există, cu siguranță, în A două elemente distincte a căror sumă este egală cu 104.

Soluție. Elementele mulțimii E sînt de forma $3k + 1$, unde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Pentru a afla cîte elemente are E este suficient să aflăm valoarea cea mai mare a lui k: $3k + 1 = 100$, $k = 33$, deci $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 33\}$, adică mulțimea E are 34 de elemente. Vom considera următoarele submulțimi disjuncte două cîte două ale lui E:

$$\{1\}, \{52\}, \{4, 100\}, \{7, 97\}, \{10, 94\}, \ldots, \{46, 58\}, \{49, 55\}.$$

Reuniunea lor este, evident, E. Ele sînt în număr de 18. Dacă una dintre aceste submulțimi avînd două elemente, este submulțime și a lui A, problema este rezolvată întrucît suma elementelor unei astfel de submulțimi este 104. Presupunem contrariul, adică A nu include o astfel de submulțime, deci A este formată din cîte un singur element al celor 18 submulțimi considerate. Dar A are 19 elemente, deci, cu siguranță, există doi întregi distincți din A care aparțin uneia din perechile $(4, 100)$, $(7, 97)$, $\ldots$, $(49, 55)$ și care au suma 104.

Comentariu. Ați recunoscut metoda aplicată în rezolvare? Este principiul cutiei!

4. Dintr-o mulțime formată din 4 elemente s-au ales 8 submulțimi astfel încît oricare trei dintre ele au un element comun. Să se arate că toate aceste submulțimi au un element comun.

Soluție. Evident că mulțimea vidă nu face parte dintre submulțimile alese. Atunci este suficient să demonstrăm că printre cele 8 submulțimi alese se află și intersecția lor.

Fie E mulțimea dată. Ea are $2^4 = 16$ submulțimi care pot fi grupate în 8 perechi de submulțimi de forma $(A_k, E \setminus A_k)$, $k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$, disjuncte și a căror reuniune este E.

Cum oricare trei submulțimi alese din cele 8 au un element comun, cu atît mai mult oricare două dintre ele au un element comun.

Scanned with OKEN Scanner

Deci, din orice pereche de submulțimi de forma $(A_k, E \setminus A_k)$ este aleasă o singură submulțime pe care o notăm B_k.

Notăm :

$$C_1 = B_1 \cap B_2,\ C_2 = C_1 \cap B_3,\ C_3 = C_2 \cap B_4, \ldots, C_7 = C_6 \cap B_8.$$

Din perechea $(C_1, E \setminus C_1)$ este aleasă, cu necesitate, submulțimea C_1 deoarece, în caz contrar, ar rezulta $(B_1 \cap B_2) \cap (E \setminus C_1) = C_1 \cap (E \setminus C_1) = \emptyset$. Repetăm raționamentul pentru submulțimile $C_2, C_3, \ldots, C_7$ și obținem, succesiv, că fiecare dintre acestea este o submulțime aleasă.

Dar :

$$C_7 = C_6 \cap B_8 = C_5 \cap B_7 \cap B_8 = \ldots = C_1 \cap B_3 \cap B_4 \ldots \cap B_8 = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_8.$$

Am demonstrat deci că printre cele 8 submulțimi alese se află și intersecția lor și problema este rezolvată.

Comentarii. 1). Fie $F = \{a, b, c, d\}$. O alegere este următoarea :

$$\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}.$$

Din acest model rezultă că este suficient să fixăm un element al mulțimii E și apoi să considerăm toate submulțimile lui E care conțin acest element.

2). *Generalizare* : Dacă dintr-o mulțime având n elemente se aleg 2^{n-1} submulțimi astfel încît oricare trei dintre ele au un element comun, atunci toate aceste submulțimi au un element comun.

3). Condiția ca oricare trei dintre aceste submulțimi să aibă un element comun poate fi înlocuită cu „oricare două dintre submulțimile alese să aibă un element comun"? Justificați de ce răspunsul este negativ.

4). Se poate da și următoarea soluție prin reducere la absurd :

Fie $E=\{a, b, c, d\}$. Presupunem, prin reducere la absurd, că intersecția celor 8 submulțimi alese este vidă.

Atunci printre submulțimile alese există, cu siguranță, submulțimea A care nu îl conține pe a, B care nu îl conține pe b, C care nu îl conține pe c și D care nu îl conține pe d. Printre cele 2^4 submulțimi ale lui E există 5 care au cel puțin 3 elemente (verificați!). Rezultă că printre cele 8 submulțimi alese există, cu siguranță, submulțimi care au mai puțin de 3 elemente. Dacă printre cele alese există una cu un element, atunci aceasta intersectată cu una dintre mulțimile A, B, C sau D are ca rezultat mulțimea vidă, deci contradicție.

În cazul în care printre cele alese nu se află nici una cu un singur element, se află, cu siguranță, cel puțin una cu două elemente.

Fie aceasta, de exemplu, $F = \{a, b\}$. Evident, $F \cap A \cap B = \emptyset$, contradicție.

5. Se consideră mulțimea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Să se arate că pentru orice submulțime A a lui X, una dintre mulțimile A sau $X \setminus A$ conține trei numere cu proprietatea că unul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două.

Soluție. Vom demonstra cerința problemei prin reducere la absurd. Presupunem că există o împărțire a lui X în A și $X \setminus A$ astfel încît în niciuna dintre mulțimile A și $X \setminus A$ nu există trei numere cu proprietatea că unul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două.

În acest caz numerele 4, 5, 6 nu pot fi toate în A sau în $X \setminus A$.

Vom arăta că, încercînd să distribuim aceste 9 numere date în A și $X \setminus A$ fără ca 4, 5 și 6 să fie în aceeași mulțime, vom ajunge la un moment dat în situația că în A sau în $X \setminus A$ se vor găsi, totuși, trei numere din cele 9 date, cu proprietatea că unul dintre ele este egal cu semisuma celorlalte două.

Analog vom proceda și dacă în loc de (4, 5, 6) vom considera tripletele (1, 2, 3); (2, 3, 4) etc., triplete cu proprietatea că unul dintre ele este media aritmetică a celorlalte două.

Să revenim la tripletul (4, 5, 6). Dacă $4 \in A$ și $6 \in A$ atunci $2 \notin A$, $5 \notin A$ și $8 \notin A$ deci $\{2, 5, 8\} \subset X \setminus A$, ceea ce contrazice presupunerea. Dacă $4 \in A$ și $5 \in A$ atunci $6 \notin A$ și $3 \notin A$. De aici, $\{3, 6\} \subset X \setminus A$ și deci $9 \notin X \setminus A$, adică $\{4, 5, 9\} \subset A$ și $1 \notin A$ și $7 \notin A$, deci $\{1, 3, 6, 7\} \subset X \setminus A$. De aici, $8 \notin X \setminus A$, deci $\{4, 5, 8, 9\} \subset A$. A mai rămas de distribuit elementul 2. Dacă $2 \in A$ atunci tripletul (2, 5, 8) contrazice presupunerea, iar dacă $2 \in X \setminus A$, numerele 1, 2, 3 infirmă ipoteza noastră.

Scanned with OKEN Scanner

Comentarii. 1). Dacă ne oprim aici, problema nu este încă rezolvată. Am considerat pînă acum situaţiile $\{4, 6\} \subset A$ şi $\{4, 5\} \subset A$. Rămîne de studiat cazul $\{5, 6\} \subset A$. Analizaţi acest caz.

2). Încercaţi să rezolvaţi următoarea problemă : Dacă vîrfurile unui poligon regulat cu 7 laturi sînt colorate cu două culori diferite să se demonstreze că există trei vîrfuri la fel colorate care determină un triunghi isoscel. Numerotaţi vîrfurile! Comparaţi problema dată cu problema rezolvată!

6. Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ mulţimea $E_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ poate fi împărţită în trei submulţimi disjuncte două cîte două, astfel încît suma elementelor din fiecare să fie aceeaşi?

Soluţie. Suma elementelor mulţimii E_n este :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

În mod necesar trebuie ca numărul $\frac{n(n+1)}{2}$ să fie divizibil cu 3. Acest fapt este posibil numai dacă n sau $n+1$ este multiplu de 3. Pentru $n = 2$ sau $n = 3$ se verifică imediat că problema nu este posibilă.

Pentru $n = 5$, problema are soluţie : $E_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi fie $A = \{1, 4\}$ $B = \{2, 3\}$, $C = \{5\}$, submulţimi ale ei care îndeplinesc condiţiile cerute.

Pentru $n = 6$, $E_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi există soluţie : $A = \{1, 6\}$, $B = \{2, 5\}$, $C = \{3, 4\}$.

Dacă $n = 8$, $E_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, cu soluţia $A = \{4, 8\}$, $B = \{5, 7\}$ şi $C = \{1, 2, 3, 6\}$.

În sfîrşit, pentru $n = 9$ problema are, de asemenea, soluţie : $E_9 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi $A = \{6, 9\}$, $B = \{7, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Să arătăm acum că pentru orice $n > 3$, n multiplu de 3 sau $n + 1$ multiplu de 3, adică pentru n egal cu $5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, \ldots, 3k-1, 3k, \ldots$, problema are soluţie. Pentru n egal cu 5, 6, 8 şi 9 am arătat deja. Pentru celelalte valori este suficient să facem următoarele două observaţii :

1) Oricare dintre numerele $11, 12, 14, 15, 17, 18, 29, 21, \ldots, 3k - 1, 3k$ se obţine adăugînd la unul dintre numerele 5, 6, 8, 9 un multiplu de 6.

2) Orice mulţime de 6 numere naturale consecutive $\{a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5, a + 6\}$ poate fi împărţită în trei submulţimi disjuncte $\{a+1, a + 6\}$, $\{a + 2, a + 5\}$, $\{a + 3, a + 4\}$ fiecare avînd suma elementelor egală cu $2a + 7$.

Comentariu. De aici rezultă imediat modul în care se poate construi soluţia. Să exemplificăm pentru $n = 27$. Avem $27 = 3 \cdot 6 + 9$, deci vom pleca de la modelul prezentat pentru $n = 9$:

$$E_{27} = E_9 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

unde $M_1 = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$; $M_2 = \{16, 17, 18, 19, 20, 21\}$; $M_3 = \{22, 23, 24, 25, 26, 27\}$.

La mulţimea A din modelul pentru $n = 9$ vom reuni una dintre mulţimile (*) $\{10, 15\}$, $\{11, 14\}$, $\{12, 13\}$, una dintre mulţimile (**) $\{16, 21\}$, $\{17, 20\}$, $\{18, 19\}$ şi una dintre mulţimile (***) $\{22, 27\}$, $\{23, 26\}$, $\{24, 25\}$. La B vom reuni cîte una dintre cele două mulţimi rămase de la (*), (**), (***), iar la C cele trei mulţimi ce mai rămîn. Se observă că soluţia, în acest caz, nu este unică.

În general, pentru un n dat, $n = 3k$ sau $n = 3k - 1$, scriem $n = 6q + p$ cu $p \in \{5, 6, 8, 9\}$, etc.

7. Să se determine mulţimile nevide $A \subset \mathbb{R}^*$ cu proprietăţile :

i). A are cel mult 5 elemente;

ii). dacă $x \in A$ atunci şi $\frac{1}{x} \in A$ şi $1 - x \in A$.

Soluţie. Dacă $x \in A$, conform ipotezei şi $1 - x \in A$, atunci şi inversul acestui element aparţine lui A, deci $\frac{1}{1-x} \in A$, (1).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x \in A$, cum $\frac{1}{x} \in A$ rezultă $1 - \frac{1}{x} \in A$, adică $\frac{x-1}{x} \in A$, (2).

Dacă $x \in A$, conform lui (2) și $\frac{x-1}{x} \in A$, deci și inversul acestuia aparține lui A, adică $\frac{x}{x-1} \in A$, (3).

Din cele de mai sus rezultă că, dacă $x \in A$, atunci:

$$B = \left\{x, \frac{1}{x}, 1-x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}\right\} \subset A.$$

Dar A trebuie să aibă cel mult 5 elemente, deci cel puțin două dintre elementele lui B trebuie să fie egale. Să analizăm cazurile posibile.

a) Dacă $x = \frac{1}{x}$, atunci $x^2 - 1 = 0$, de unde $x = 1$ sau $x = -1$. Dar pentru că $\frac{1}{1-x} \in A$ rezultă $x \neq 1$ și rămîne $x = -1$. De aici, $A = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

b) Dacă $x = 1 - x$, avem $x = \frac{1}{2}$ și, înlocuind, obținem $A = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

c) Dacă $x = \frac{1}{1-x}$ avem $x^2 - x + 1 = 0$. Dar pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 > 0$ deci, în acest caz, nu avem soluții.

d) Cazul $x = \frac{x-1}{x}$ este analog cu c).

e) Dacă $x = \frac{x}{x-1}$, avem $x^2 = 2x$ cu soluția $x = 0$ $\left(\text{care nu convine pentru că } \frac{1}{x} \in A\right)$ și soluția $x = 2$. Dacă $x = 2$ regăsim mulțimea $A = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

Am analizat pînă acum 5 cazuri posibile. Este adevărat că, în total, avem de analizat 15 cazuri? Justificați răspunsul! Oricare dintre cazurile rămase de analizat conduce la unul dintre cazurile deja studiate. Rămîne că singura mulțime care satisface condițiile problemei este $A = \left\{2, \frac{1}{2}, -1\right\}$.

Comentariu. Esențială în rezolvare a fost observația că dacă $x \in A$ atunci rolul lui x, conform ipotezei, poate fi preluat de fiecare dintre elementele $\frac{1}{x}$ și $1 - x$.

8. Care este cea mai mare valoare a lui n, pentru care există n numere reale distincte două cîte două $x_1, x_2, \ldots, x_n$, astfel încît să aibă loc egalitatea de mulțimi:

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n\}?$$

Soluție. Două mulțimi sînt egale dacă și numai dacă sînt formate din aceleași elemente. Să considerăm două mulțimi egale avînd ca elemente numere reale. Fie ele $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$, (1). Evident, cele două mulțimi diferă, eventual, numai prin ordinea elementelor. Considerînd mulțimile:

$$A_1 = \{|a_1|, |a_2| \ldots, |a_p|\}, \quad B_1 = \{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_p|\}$$

formate din valorile absolute ale elementelor mulțimilor (1) atunci avem și $A_1 = B_1$ (A_1 și B_1 neavînd, eventual, toate elementele distincte).

Dacă se realizează egalitatea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n\}$ atunci, cu siguranță, se realizează și egalitatea:

$$\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = \{|x_1|^n, |x_2|^n, \ldots, |x_n|^n\}. \quad (2)$$

Notăm mulțimile din egalitatea (2) cu A și B. Fie $|x_i|$ cel mai mic element al mulțimii A cu $|x_i|<1$ și $x_i \neq 0$. Atunci $|x_i| > |x_i|^n$, $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ (vezi introducerea la capitolul „*Probleme de ordonare*"). Rezultă că mulțimea B are un element mai mic decît cel mai mic element al mulțimii A, deci egalitatea nu este posibilă în ipoteza făcută.

Să presupunem că $|x_j|$ este cel mai mare element al mulțimii A, cu $|x_j| > 1$. Atunci $|x_j|^n > |x_j|$, deci mulțimea B are un element mai mare decît orice element al mulțimii A. Rezultă că egalitatea nu este nici în acest caz posibilă.

Rămîne că $|x_k| = 1$ sau $|x_k| = 0$, adică elementele mulțimilor considerate în enunț se află printre elementele $-1, 0, 1$.

Se observă cu ușurință că:

$$\{-1, 0, 1\} = \{(-1)^3, 0^3, 1^3\},$$

deci cea mai mare valoare a lui n este 3.

Comentariu. Această problemă are și alte soluții. Cea prezentată mai sus pare a fi cea mai „elementară".

9. Fie mulțimea $E = \{1, 2, 3, \ldots, 1\,000\}$. Care este numărul minim de submulțimi în care poate fi partiționată mulțimea E astfel încît dacă într-o submulțime se află 2^p, $p \in \mathbb{N}^*$, în acea submulțime să nu se mai afle și $(2^p)^q$, $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$?

Soluție. Puterile naturale ale lui 2 cu exponent nenul, mai mici ca 1 000, sînt: $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9$. Dacă fiecare dintre aceste elemente le considerăm în submulțimi disjuncte atunci cerința problemei ca odată cu 2^p să nu se afle în aceeași submulțime și $(2^p)^q$ este realizată. Această împărțire nu satisface însă condiția de minim, pentru că, de exemplu, $2^2, 2^3, 2^5, 2^7$ pot fi în aceeași submulțime. Orice putere naturală a unuia dintre aceste numere nu are ca rezultat pe unul dintre ele.

Problema cere ca în submulțimea în care se află elementul 2 să nu se mai afle altă putere a lui 2, în submulțimea în care se află 2^2 să nu se mai afle altă putere a lui 2^2, în submulțimea în care se află 2^3 să nu se afle o altă putere a lui 2^3 etc.

Vom încerca să rezolvăm această problemă „constructivist", deci construind un model care să realizeze minimul cerut.

În mulțimea A_1 putem pune elementele 1, 2, 3, dar nu pe $4 = 2^2$. Fixăm, deci, pe $A_1 = \{1, 2, 3\}$. În A_2 punem elementele $4 = 2^2$, 5, 6, 7, $8 = 2^3 \neq (2^2)^q$, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 dar nu pe $16 = 2^4 = (2^2)^2$. Deci $A_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$. Analog, $A_3 = \{16, 17, \ldots, 254, 255\}$.

Observăm că $16 = 2^4$, iar $255 = 2^8 - 1 = (2^4)^2 - 1$. În sfîrșit:

$$A_4 = \{256, 257, \ldots, 1\,000\}.$$

Am arătat, astfel, că numărul minim de submulțimi care satisfac cerințele problemei este 4 și am dat și un model de realizare. Este evident că soluția nu este unică. Important este ca $2, 2^2, 2^4, 2^8$ să fie în submulțimi diferite și nici una dintre acestea să nu conțină simultan pe 2^3 și 2^6 sau pe 2^3 și 2^9.

Comentarii. 1). În mod natural se pune întrebarea:

A fost esențial în rezolvarea problemei faptul că ultimul element al mulțimii E a fost 1 000?

Răspunsul este negativ. Același rezultat îl obțineam dacă E avea ca ultim element pe oricare dintre numerele: $256 = 2^8$, 257, ..., 65 454, $65\,455 = 2^{16} - 1 = (2^8)^2 - 1$.

2). Problema devenea mai interesantă dacă era formulată astfel:

Fie $E = \{2, 3, \ldots, m\}$. Să se determine cea mai mare valoare a lui m astfel încît E să se poată partiționa în 4 submulțimi astfel încît în niciuna dintre aceste submulțimi să nu existe două numere dintre care unul să fie o putere cu exponent natural a celuilalt.

A fost exclus din E elementul 1 pentru că $1^p = 1$, $(\forall)\ p \in \mathbb{N}$.

Întrucît cele mai numeroase puteri în șirul $2, 3, \ldots, m$ sînt ale lui 2, este suficient să rezolvăm problema astfel încît, dacă într-o submulțime se află 2^p, în ea nu trebuie să se afle $(2^p)^q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Se poate demonstra că $m = 2^{16} - 1 = 2^{2^4} - 1$.

3). O generalizare a problemei este următoarea:

Să se determine cel mai mare număr natural m astfel încît mulțimea $E = \{2, 3, \ldots, m\}$ să se poată partiționa în n submulțimi astfel încît în nici una dintre aceste submulțimi să nu existe

două numere dintre care unul să fie o putere cu exponent natural a celuilalt. Răspunsul este $m = 2^{2^n} - 1$.

10. Să se cerceteze dacă există numere naturale n astfel încît mulțimea $E = \{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ să poată fi împărțită în două submulțimi disjuncte cu proprietatea că produsul tuturor elementelor uneia dintre acestea să fie egal cu produsul tuturor elementelor celeilalte submulțimi.

Soluție. Pentru $n = 0$, evident, problema nu are soluție.

Dacă cel puțin un element al mulțimii date se divide cu un număr prim p, $p \geqslant 7$, problema nu are, de asemenea, soluție. Într-adevăr, cum mulțimea E are numai 6 elemente, numere naturale consecutive, atunci, dacă unul dintre acestea se divide cu p, p prim, $p \geqslant 7$, nu va mai exista un alt element divizibil cu p.

Deci, indiferent care ar fi cele două submulțimi ale lui E, produsul elementelor uneia nu poate fi egal cu produsul elementelor celeilalte pentru că p apare numai într-un singur produs.

De exemplu, pentru $n = 6$ și $E = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, există două numere 7 și 11 care fac partiția imposibilă.

Cum în E se află 6 numere naturale consecutive atunci cel puțin unul este divizibil cu 5. Dacă ar exista numai unul atunci, la fel ca mai sus, partiția cerută nu se poate realiza. Trebuie deci să existe două elemente divizibile cu 5. Acestea nu pot fi decît n și $n+5$. Rezultă deci $n = 5k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Dar n și $n+5$ trebuie să facă parte din submulțimi distincte.

Să observăm că produsul a două dintre elementele mulțimii este mai mare decît fiecare dintre celelalte elemente ale mulțimii.

Este suficient să arătăm că produsul cel mai mic este mai mare decît cel mai mare dintre elementele rămase, adică $n(n+1) > n+5$. Într-adevăr, diferența $n(n+1) - (n+5) = n^2 - 5$ este pozitivă pentru orice $n \geqslant 5$.

Rezultă de aici că produsele care ar putea satisface problema trebuie, cu necesitate, să conțină cîte trei și numai cîte trei factori.

Există următoarele 6 posibilități:

1) $n(n+1)(n+2)$ și $(n+3)(n+4)(n+5)$;
2) $n(n+1)(n+3)$ și $(n+2)(n+4)(n+5)$;
3) $n(n+1)(n+4)$ și $(n+2)(n+3)(n+5)$;
4) $n(n+2)(n+3)$ și $(n+1)(n+4)(n+5)$;
5) $n(n+2)(n+4)$ și $(n+1)(n+3)(n+5)$;
6) $n(n+3)(n+4)$ și $(n+1)(n+2)(n+5)$.

Să analizăm aceste cazuri. Primele cinci nu sînt posibile pentru că fiecare dintre factorii primului produs sînt mai mici decît factorul corespunzător din cel de-al doilea produs și deci produsul din stînga este mai mic decît cel din dreapta. Egalînd factorii din cazul 6:

$$n(n+3)(n+4) = (n+1)(n+2)(n+5)$$

avem:

$$n^3 + 7n^2 + 12n = n^3 + 8n^2 + 17n + 10,$$

adică $n^2 + 5n + 10 = 0$, egalitate imposibilă, pentru că $n \in \mathbb{N}$ și $n \geqslant 5$.

Cu aceasta problema este complet analizată. Răspunsul este: nu există nici un $n \in \mathbb{N}$ pentru care cerințele enunțului să fie satisfăcute.

Comentarii. 1). Deși nu face parte dintre problemele foarte dificile, redactarea soluției a necesitat multă atenție.

2). Sugerăm următoarea soluție mai simplă:

Considerăm mulțimea $A \subset E$, $A = \{n+1, n+2, n+3, n+4\}$, $n \neq 0$. Printre cele patru numere naturale, mai mari ca 1, două sînt pare, iar două impare. Dintre cele două numere impare cel mult unul poate fi multiplu de 3. Dacă nici unul nu este multiplu de trei înseamnă că ele sînt multiplii impari ai unor numere prime mai mari ca trei.

Rezultă că următorul multiplu (mai mic sau mai mare) al noului număr prim nu se mai află în mulțimea E, deci împărțirea cerută nu se poate face.

Dacă unul dintre ele este multiplu de 3 celălalt este de forma $3k \pm 2$ și, fiind impar, este multiplu al unui număr prim, mai mare sau cel puțin egal cu 5.

Dar în E nu se mai poate afla un alt multiplu al acestui număr prim impar.

În concluzie, nu există nici un număr natural pentru care problema să aibă soluție.

Scanned with OKEN Scanner

3). Să demonstrăm afirmația:

Oricare ar fi numărul natural n, nenul, mulțimea $E=\{1, 2, \ldots, n\}$ nu poate fi împărțită în două submulțimi A și $E \setminus A$ astfel încît produsul tuturor elementelor din A să fie egal cu produsul tuturor elementelor din $E \setminus A$.

Soluția se bazează pe următoarea teoremă a lui CEBÎȘEV: Pentru orice număr natural x, $x \geqslant 2$, între x și $2x$ există cel puțin un număr prim. Teorema este cunoscută sub denumirea de *„postulatul lui* BERTRAND". Există mai multe demonstrații ale acestei teoreme. Ele depășesc cunoștințele elementare. Folosind teorema, rezultă că există un număr prim p, $\frac{n}{2} < p < n$. Dacă $p \in A$ atunci el nu mai poate apare în descompunerea în factori a produsului elementelor lui $E \setminus A$ deoarece cel mai mic factor care îl conține pe p este $2p$, dar $2p > n$, deci nu se află în E.

Rezultă că egalitatea celor două produse este imposibilă și cu aceasta afirmația enunțată este demonstrată.

PROBLEME PROPUSE

1. a) Submulțimile $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{7, 8, 9\}$ constituie o partiție a mulțimii:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}?$$

Dar submulțimile $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6, 7\}$, $\{7, 8, 9\}$?

b) Fie $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinați toate partițiile posibile ale mulțimii E.

2. Fie mulțimea $E = \{1, 2, \ldots, 1\,000\}$. Poate fi oare împărțită în 500 de submulțimi disjuncte două cîte două, fiecare conținînd două elemente a căror sumă să fie pătrat perfect?

3. Fie mulțimea $E=\{1, 2, \ldots, 2\,000\}$. Determinați cel mai mic număr natural n astfel încît orice submulțime cu n elemente a mulțimii E să conțină cel puțin două numere a căror sumă se divide cu 3.

4. Să se determine toate mulțimile $A \subset \mathbb{R}$, avînd un număr finit de elemente, cu proprietea că, oricare ar fi $a \in A$, rezultă că $a + |a| \in A$.

5. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_m$, submulțimi distincte ale unei mulțimi E cu 4 elemente, care au proprietatea că două cîte două au intersecția diferită de mulțimea vidă. Arătați că cea mai mare valoare posibilă al lui m este egală cu 8.

6. Fie mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încît numărul minim de submulțimi în care se poate partiționa această mulțime, cu proprietatea că dacă una dintre ele conține pe 3^p, ea nu mai conține pe $(3^p)^q$, $p \in \mathbb{N}^*$, $q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, este 3. Să se determine numărul minim de submulțimi în care se poate împărți mulțimea, astfel încît dacă, o submulțime conține pe 2^a, ea nu conține pe $(2^a)^b$, $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

7. Fie E, o mulțime și A, B, C trei submulțimi ale sale diferite de E. 1) Dacă $A \cup B = B \cup C = C \cup A = E$, să se arate că A, B, C nu este o partiție a lui E. 2) Dacă $A \subset B \cup C$, $B \subset A \cup C$, $C \subset A \cup B$ rezultă că $A = B = C$?

8. Se dă mulțimea $A = \{500, 501, \ldots, 550\}$. Demonstrați că nu există 5 submulțimi ale ale lui A astfel încît reuniunea lor să fie A și suma elementelor din fiecare să fie strict mai mică decît 5 555.

9. Să demonstreze că mulțimea $\{n, n+1, n+2, \ldots, n^3 + n^2 + n + 2\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, conține puterea a patra a unui număr natural.

SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. a) Nu, pentru că reuniunea primelor submulțimi nu dau E, iar, în celălalt caz, submulțimile nu sînt disjuncte două cîte două.

b) 1) $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$;
2) $\{1, 2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$;
3) $\{1, 3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$;
4) $\{1, 4\}$, $\{2\}$, $\{3\}$;
5) $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{4\}$;
6) $\{2, 4\}$, $\{1\}$, $\{3\}$;
7) $\{3, 4\}$, $\{1\}$, $\{2\}$;
8) $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$;
9) $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$;
10) $\{2, 3\}$, $\{1, 4\}$;
11) $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$;
12) $\{1, 2, 4\}$, $\{3\}$;
13) $\{1, 3, 4\}$, $\{2\}$;
14) $\{2, 3, 4\}$, $\{1\}$.

2. Da! Este suficient exemplul:

$A_1 = \{24, 1000\}$, $A_2 = \{25, 999\}$, $\ldots$, $A_{488} = \{511, 513\}$, $A_{489} = \{512, 17\}$, $A_{490} = \{2, 23\}$, $A_{491} = \{3, 22\}$, $\ldots$, $A_{499} = \{12, 13\}$, $A_{500} = \{1, 8\}$.

Primele 489 submulțimi au suma elementelor $1\,024 = 32^2$, a 489-a mulțime are suma elementelor $529 = 23^2$, oricare dintre următoarele 10 submulțimi are suma elementelor $25 = 5^2$, iar ultima are suma elementelor $9 = 3^2$. Se observă că modelul prezentat satisface și condiția că oricare două submulțimi sînt disjuncte.

Scanned with OKEN Scanner

3. Dacă într-o mulțime se află toate numerele de forma $3k+1$, condiția nu este îndeplinită. Mai mult, în această mulțime se mai poate afla și un multiplu de 3, fără a fi îndeplinită condiția.

În cazul în care se mai atașează acestei mulțimi încă un element, acesta neputînd fi decît de forma $3p$ sau $3p+2$, condiția cerută este îndeplinită.

Numărul căutat va fi, deci, numărul elementelor mulțimii formată din toate numerele de forma $3k+1$, un multiplu de 3 și încă un element din cele rămase. Avem $3k+1=2\,000$, de unde k maxim este $k=\left[\frac{1\,999}{3}\right]=666$. Deci, numărul n care satisface problema este $n=668$.

Observație. Încercați o generalizare a problemei.

4. Dacă există $a>0$ astfel încît a aparține lui A rezultă că și numărul $a+|a|=2a$ aparține lui A. Atunci și $2a+|2a|=4a=2^2a$ aparține lui A și $4a+|4a|=8a=2^3a$ etc. deci 2^na aparține lui A. Cum n poate lua oricîte valori, rezultă că mulțimea A nu are număr finit de elemente.

Dacă $a\leqslant 0$ atunci $a+|a|=0$ aparține lui A. Este suficient, deci, să fixăm un număr finit de numere negative $a_1, a_2, \ldots, a_p$ și atunci mulțimea A este de forma $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_p, 0\}$, unde p este un număr natural.

5. Cum $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sînt distincte atunci și $E\setminus A_1, E\setminus A_2, \ldots, E\setminus A_m$ sînt distincte două cîte două. Pe de altă parte, una dintre submulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_m$ nu poate fi egală cu una dintre submulțimile $E\setminus A_1, E\setminus A_2, \ldots, E\setminus A_m$; rezultă că mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_m, E\setminus A_1, E\setminus A_2, \ldots, E\setminus A_m$, în număr de $2m$, sînt distincte două cîte două. Mulțimea E cu 4 elemente are $2^4=16$ submulțimi toate distincte două cîte două. Rezultă că $2m\leqslant 16$, $m\leqslant 8$. Să arătăm că m poate fi chiar $8=2^3=2^{4-1}$. Acest maxim se realizează dacă vom considera toate submulțimile lui E care conțin un același element. Revedeți problema comentată nr. 4. Dacă E are n elemente atunci m maxim este 2^{n-1}.

6. Conform problemei comentată nr. 9, rezultă că $3^4\leqslant n\leqslant 3^8-1$, deci $81\leqslant n\leqslant 6\,560$, $n\in\mathbb{N}$.

Dacă $81\leqslant n\leqslant 255$, răspunsul este 3. Dacă $256\leqslant n\leqslant 6560$, răspunsul este 4.

7. 1) Este suficient să arătăm că există printre cele 3 submulțimi cel puțin două care nu sînt disjuncte.

Deoarece $C\subset E$ și $C\neq E$ rezultă că există un element $a\in E\setminus C$. Din $B\cup C=E$ rezultă $a\in B$ și din $C\cup A=E$ rezultă $a\in A$ deci $a\in A\cap B$.

2) Nu întotdeauna! Contraexemplu:

$$A=\{a, b\},\ B=\{a\},\ C=\{b\},\ a\neq b.$$

8. Fie A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cele 5 submulțimi. Mulțimea A avînd $550-500+1=51$ elemente rezultă că cel puțin o submulțime A_k are minim 11 elemente. Dacă le luăm pe cele mai mici 11, suma acestora este:

$$500+501+\ldots+510=500\cdot 11+(1+2+\ldots+10)=5\,500+\frac{10\cdot 11}{2}=5\,555.$$

Dar, din ipoteză, suma elementelor din fiecare submulțime este mai mică decît 5555 deci contradicție.

9. Dacă $n=m^4$, $m\in\mathbb{N}^*$, problema este rezolvată. Presupunem că nu există în mulțime puterea a patra a unui număr natural. Atunci $m^4<n<n^3+n^2+n+2<(m+1)^4$ de unde rezultă $n^3+n^2+n+2-(m+1)^4<0$ (1). Deoarece $m^4<n$ avem $n\geqslant m^4+1$ și atunci $n^3+n^2+n+2-(m+1)^4\geqslant(m^4+1)^3+(m^4+1)^2+(m^4+1)+2-(m+1)^4$.

Notînd $E=(m^4+1)^3+(m^4+1)^2+(m^4+1)+2-(m+1)^4$, avem $E=0$ pentru $m=1$ și $E>0$ pentru $m\geqslant 2$, deoarece $(m^4+1)^2>(m+1)^4$.

Rezultă $n^3+n^2+n+2-(m+1)^4\geqslant 0$ (2). Din (1) și (2) obținem o contradicție, deci mulțimea dată conține puterea a patra a unui număr natural.

Scanned with OKEN Scanner

CÎTEVA PROBLEME DE SINTEZĂ

1. Să se determine numărul perechilor (a, b) de numere naturale, ca $a<b$, cuprinse între 1 și 1 000, astfel încît 49 să dividă pe $a^2 + b^2$.

Generalizare.

2. Să se demonstreze că există oricîte numere naturale, care nu pot fi scrise cu suma pătratelor a trei numere întregi.

3. În cîte moduri distincte se poate scrie un număr natural z sub forma $z = x! + y!$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$ și $x \leqslant y$?

4. Restul împărțirii unui număr natural a, $a > n^2 + n$, la numărul natural n este r_1, iar restul împărțirii lui a la $n+1$ este r_2.

a) Dacă $r_1 = r_2 = r$, arătați că a împărțit la n^2+n dă tot restul r.

b) Aflați restul împărțirii lui a la n^2+n cînd r_1 este diferit de r_2.

5. Între dreptele paralele d_1 și d_2, situate la distanța 1 una față de cealaltă, se construiesc cercuri astfel încît suma lungimilor lor este 10. Să se arate că se poate construi o dreaptă care să intersecteze cel puțin 4 dintre aceste cercuri.

6. Să se demonstreze că fiecare dintre sumele:

$$S_1 = \frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \ldots + \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

este mai mică decît 2.

7. Se calculează suma cifrelor pentru fiecare dintre numerele de la 1 la 10^9. Pentru fiecare număr dintre cele un miliard obținute se calculează din nou suma cifrelor, repetîndu-se această operație pînă cînd se obțin un miliard de numere formate din cîte o singură cifră. Să se decidă care dintre numerele 1 și 2 se repetă de mai multe ori în mulțimea de numere astfel obținute.

8. Dacă a, b, c sînt măsurile laturilor unui triunghi, iar p semiperimetrul acestuia, să se demonstreze inegalitățile:

I. $3(ab+bc+ca) < (a+b+c)^2 < 4(ab+bc+ca)$;

II. $8(p-a)(p-b)(p-c) < abc$.

9. Considerăm toate numerele naturale cu următoarele proprietăți:

a) fiecare are nouă cifre, distincte între ele și diferite de 0;

b) fiecare se termină cu cifra 5.

Decideți dacă printre acestea se află sau nu un pătrat perfect.

Scanned with OKEN Scanner

10. La un concurs sportiv participă 15 echipe, fiecare dintre acestea jucînd cu toate celelalte. Pentru victorie se acordă 3 puncte, pentru meci egal două puncte, iar pentru înfrîngere un punct. În clasamentul întocmit la sfîrșitul concursului nu există echipe cu același număr de puncte. Știind că ultima echipă are 21 de puncte, să se arate că prima a făcut cel puțin un meci nul.

11. La un turneu iau parte n echipe. Fiecare dispută cîte un meci cu toate celelalte. Se acordă două puncte pentru victorie, un punct pentru meci egal și nici unul pentru înfrîngere. Care poate fi diferența maximă de puncte între două echipe care au ocupat în clasamentul final locuri vecine?

12. Să se determine cel mai mic număr natural n cu proprietatea că, oricum am alege n numere naturale, mai mici sau cel mult egale cu 2 000, distincte și nenule, printre acestea există două a căror diferență este egală cu cel mai mic număr ales.

13. Fie $n+1$ numere naturale nenule mai mici, cel mult egale cu $2n$. Demonstrați că printre acestea se află două numere cu proprietatea că unul dintre ele este divizibil prin celălalt.

14. Se dau numerele întregi și pozitive x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 care satisfac relațiile:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\,000, \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5>0, \\ x_1+x_2-x_3+x_4-x_5>0, \\ -x_1+x_2+x_3-x_4+x_5>0, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-x_5>0, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4+x_5>0. \end{cases}$$

a) Să se găsească cea mai mare valoare a puterii $(x_1+x_3)^{x_2+x_4}$;

b) Să se stabilească în cîte moduri pot fi alese x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, astfel ca pentru valorile respective să se atingă valoarea maximă de la pct. a).

15. Fie ABC un triunghi echilateral și E mulțimea tuturor punctelor segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[CA]$. Este adevărat că pentru orice partiție a lui E în două submulțimi, există un triunghi dreptunghic ale cărui vîrfuri aparțin toate trei unei aceleiași submulțimi? Justificați răspunsul!

16. Într-un tablou cu n linii și n coloane, n impar, se scriu numerele de la 1 la n astfel ca pe fiecare linie și pe fiecare coloană să apară toate aceste numere.

Numerele sînt dispuse simetric față de una dintre diagonalele tabloului. Dovediți că pe această diagonală apar toate numerele de la 1 la n.

17. Se dau numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_{22}$ astfel încît $a_1=0$ și $|a_i|=|a_{i-1}+1|$ pentru $i\in\{2, 3, \ldots, 50\}$.

Demonstrați că suma acestor numere este cel puțin egală cu -25.

Generalizare.

18. Fie 25 de numere dispuse într-un tablou cu 5 linii și 5 coloane astfel încît produsul dintre suma numerelor de pe o linie și suma numerelor aflate pe o coloană este egal cu numărul aflat la intersecția liniei cu coloana respectivă. Determinați suma tuturor celor 25 de numere.

Generalizare.

19. Fie $n\in\mathbb{N}$. Dacă $2+2\sqrt{28n^2+1}$ este număr natural, atunci acesta este pătrat perfect.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚII, INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

1. Să determinăm întîi resturile pătratului unui număr natural n la împărțirea cu 7. Numărul n poate avea una din formele: $7k$, $7k \pm 1$, $7k \pm 2$, $7k \pm 3$. Ridicînd la pătrat obținem formele $7q$, $7q + 1$, $7q + 4$, $7q + 2$. Deci resturile căutate sînt 0, 1, 2, 4. Rezultă de aici că, dacă $7 | a^2 + b^2$, cu necesitate $7 | a^2$ și $7 | b^2$ și, încă, $7 | a$ și $7 | b$.

Trebuie deci să aflăm numărul multiplilor lui 7 mai mici ca 1 000. Acesta este:

$$\left[\frac{1\,000}{7}\right] = 142.$$

Dacă a și b iau cîte 142 de valori atunci (a, b) poate lua 142^2 de valori. Dar, printre acestea, 142 de perechi (a, b) au $a = b$ și, în plus, am numărat atît perechea (a, b), cît și perechea (b, a). Trebuie numărate numai perechile (a, b), cu $a < b$. Avem:

$$141 + 140 + \ldots + 2 + 1 = \frac{141 \cdot 142}{2} = 10\,011.$$

Dacă se impunea condiția $a \leqslant b$ atunci numărul căutat era:

$$10\,011 + 142 = 10\,153.$$

Generalizare. În loc de 1 000 vom lua un n oarecare. Atunci numărul căutat va fi:

$$\frac{\left(\left[\frac{n}{7}\right] - 1\right)\left(\left[\frac{n}{7}\right]\right)}{2}.$$

2. Să observăm că există oricîte numere naturale care pot fi scrise ca o sumă de trei pătrate de numere întregi. Este suficient să înlocuim în suma $a^2 + b^2 + c^2$ pe a, b, c cu orice numere întregi.

Există și numere care nu au această proprietate. De exemplu, 7. Oricum l-am scrie pe 7 ca o sumă de trei numere nenegative, acesta nu va putea fi scris ca sumă de trei pătrate de numere întregi. Analog, numărul 15.

Trebuie să arătăm că există oricîte astfel de numere. Este suficient să demonstrăm că numerele de forma $8k + 7$, $k \in \mathbb{N}$, nu pot fi scrise ca sumă de trei pătrate.

Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că există $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încît:

$$8k + 7 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Avem de analizat cazurile:

I) numerele a, b, c sînt toate pare, este absurd;

II) dacă două dintre acestea sînt impare, iar unul este par, suma lor este pară, deci contradicție;

III) dacă două sînt pare și unul este impar avem:

$$(2l)^2 + (2p)^2 + (2q + 1)^2 = 4(l^2 + p^2 + q^2 + q) + 1.$$

Dacă suma $l^2 + p^2 + q^2 + q$ este pară rezultă că $a^2 + b^2 + c^2$ este de forma $8k + 1$, iar dacă $l^2 + p^2 + q^2 + q$ este număr impar atunci $a^2 + b^2 + c^2$ este de forma $8k + 5$, deci aceeași contradicție;

IV) dacă a, b, c sînt toate impare avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2l + 1)^2 + (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 = 4l(l + 1) + 4p(p + 1) + 4q(q + 1) + 3.$$

Cum produsul a două numere consecutive este par rezultă că, în acest caz, $a^2 + b^2 + c^2$ este de forma $8k + 3$, contradicție.

Am examinat toate cazurile posibile. Rezultă că există oricîte numere naturale care nu pot fi scrise sub forma $a^2 + b^2 + c^2$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

3. Să cercetăm dacă z poate fi scris în cel puțin două moduri distincte, sub forma cerută.

Presupunem că există $x_1 \leqslant y_1$ și $x_2 \leqslant y_2$ astfel încît $z = x_1! + y_1! = x_2! + y_2!$ și, în plus, $x_1 < x_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Să comparăm pe y_1 cu x_2. Dacă $y_1 < x_2$, avem $x_1! + y_1! < x_2! + x_2! \leqslant x_2! + y_2!$, adică $z < z$, ceea ce este absurd. Rămîne că $y_1 \geqslant x_2$. În acest caz, din $x_1! + y_1! = x_2! + y_2!$ rezultă că $x_1! = x_2! + y_2! - y_1!$ și, cum $x_2 \leqslant y_2$, putem ca în membrul doi să dăm factor comun pe $x_2!$, adică $x_1! = x_2! \cdot k$, $k \in \mathbb{N}^*$. De aici, deducem că $x_2!$ divide pe $x_1!$, deci $x_1 \geqslant x_2$, ceea ce contrazice ipoteza $x_1 < x_2$. Cum între x_2 și y_1 nu sepoate stabili nici o relație de ordine rezultă că z nu se poate scrie în două moduri distincte sub forma cerută deci, evident, nici în mai mult de două moduri. Rămîne că acesta poate fi scris în cel mult un mod sub forma cerută.

Observații.

Condiția ca $x, y \in \mathbb{N}^*$ este esențială. În caz contrar urmăriți exemplul:

$$3! = 0! + 2! = 1! + 2!.$$

Există numere care nu pot fi scrise în nici un mod sub forma cerută, de exemplu numerele 5, 6, 9 etc.

4. a) Dacă $a = nq_1 + r$ și $a = (n+1)q_2 + r$, rezultă

$$nq_1 = (n+1)q_2,$$

deci $q_1 = \dfrac{(n+1)q_2}{n} \in \mathbb{N}^*$. Cum n și $n+1$ sînt prime între ele rezultă că n divide q_2, deci $q_2 = nk$ de unde $a = n(n+1)k + r$.

Generalizare:

Dacă $a = n_1q_1 + r$ și $a = n_2q_2 + r$, iar n_1 și n_2 sînt prime între ele, atunci:

$$a = n_1n_2\,k + r.$$

Dacă $a = n_1q_1 + r$, $a = n_2q_2 + r$, ..., $a = n_p\,q_p + r$, unde $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sînt numere naturale, două cîte două prime între ele, atunci $a = n_1n_2 \ldots n_pk + r$, $k \in \mathbb{N}$.

b) Avem:

$$a = nq_1 + r_1,$$

$$a = (n+1)q_2 + r_2.$$

Înmulțind prima egalitate cu $n+1$, iar a doua cu n și scăzîndu-le, membru cu membru, avem:

$$a = n(n+1)(q_1 - q_2) + (n+1)r_1 - nr_2, \quad (*)$$

unde $0 \leqslant r_1 < n$, $0 \leqslant r_2 < n+1$, $r_1, r_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ și $q_1 \geqslant q_2$.

Observăm că $(n+1)r_1 - nr_2 < n(n+1)$, pentru că $r_1 < n$ și, în plus, $r_2n \geqslant 0$.

Dacă $r_1(n+1) - r_2n \geqslant 0$, atunci restul căutat este chiar $R = r_1(n+1) - r_2\,n$, $R = n(r_1 - r_2) + r_1$. Cum r_1 și $r_2 \in \mathbb{N}$, rezultă că $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ și $r_1 < n$, deci pentru ca R să fie pozitiv trebuie ca $r_1 - r_2 \geqslant 0$, adică $r_1 \geqslant r_2$. Pentru $r_1 = r_2$ regăsim primul punct al problemei.

Dacă $r_1(n+1) - r_2n < 0$, atunci relația (*) se mai poate scrie:

$$a = n(n+1)(q_1 - q_2 - 1) + n(n+1) + (n+1)r_1 - nr_2.$$

Deci, în acest caz, restul este $R = n(n+1) + (n+1)r_1 - nr_2$, adică $R = n^2 + (r_1 - r_2 + 1)n + r_1$. Cum $0 < n(n+1) + (n+1)r_1 - nr_2 < n(n+1)$ și $a > n(n+1)$, rezultă că $q_1 - q_2 - 1 > 0$.

5. Să arătăm că dacă suma lungimilor cercurilor este 10, atunci numărul lor este cel puțin 4. Presupunem că există numai 3 cercuri cu diametrul de lungime maximă, adică 1. Suma lungimilor acestora ar fi $3 \cdot \pi < 10$ deci, cu necesitate, sînt cel puțin 4 cercuri.

Construim perpendiculara AB pe dreptele date ($A \in d_1$, $B \in d_2$). Proiectăm pe segmentul $[AB]$ cercurile date.

Să presupunem că nu se poate construi dreapta cerută. Atunci fiecare punct al segmentului $[AB]$ este acoperit de cel mult trei proiecții de cercuri. În caz contrar, dreapta care trece printr-un astfel de punct și este perpendiculară pe AB ar intersecta mai mult de trei cercuri (principiul cutiei!).

Cum măsura lui $[AB]$ este 1 este suficient să demonstrăm că suma lungimilor proiecțiilor cercurilor pe $[AB]$ este mai mare ca 3, pentru că suma proiecțiilor este, de fapt, suma măsurilor diametrelor cercurilor.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă suma proiecţiilor ar fi mai mică decît 3 ar însemna că suma lungimilor cercurilor ar fi mai mică decît 3π. Din ipoteză, suma lungimilor este $10 > 3\pi$ deci, cu siguranţă, suma lungimilor proiecţiilor este mai mare decît 3 şi, prin urmare, există dreapta cerută.

Observaţie. S-ar putea construi efectiv un model al problemei numai cu rigla şi compasul?

6. Termenul generic al sumei S_1 este:

$$\frac{k^2+k-1}{(k+1)!}=\frac{k(k+1)-1}{(k+1)!}=\frac{k(k+1)}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{(k+1)!}.$$

Avem, deci:

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k-1}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)!}=$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}-\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=2-\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}<2.$$

Observaţie. Numărul $\frac{1}{(k-1)!}$, pentru $k=1$, devine $\frac{1}{0!}$ dar, prin convenţie, $0!=1$.

Termenul generic al sumei S_2 este:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}=\sqrt{k}\,\frac{1}{(k+1)\cdot k}=\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=$$

$$=\left(1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right),$$

(deoarece $\frac{k}{k+1}<1$, deci $\sqrt{\frac{k}{k+1}}<1$).

De aici rezultă că:

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}<2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+$$

$$+\ldots+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2.$$

7. Folosim faptul că un număr natural dă întotdeauna la împărţirea cu 9 acelaşi rest ca şi suma cifrelor sale (problema comentată nr. 1, cap. VI).

În cazul nostru, 1 se obţine din acele numere care dau restul 1 la împărţirea prin 9, adică din numerele 1, 10, 19, ..., 999 991, 1 000 000; 2 se obţine din acele numere care dau restul 2 la împărţirea prin 9, adică din numerele, 2, 11, 20, ..., 999 983, 999 992.

Pentru a decide care sînt în număr mai mare este suficient să le asociem în perechi de numere consecutive: 1 cu 2, 10 cu 11, 19 cu 20, ..., 999 991 cu 999 992. Rămîne numărul 1 000 000, deci numărul 1 se repetă cu 1 mai mult decît numărul 2.

8. I) Adunînd membru cu membru relaţiile:

$$2ab \leqslant a^2 + b^2,\ 2bc \leqslant b^2 + c^2,\ 2ca \leqslant c^2 + a^2,$$

avem:

$$ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

În ambii membri adunăm $2(ab + bc + ca)$ şi obţinem:

$$3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2.$$

Egalitate se obţine cînd $a = b = c$, deci cînd triunghiul este echilateral.
Pentru a demonstra membrul drept al dublei inegalităţi folosim inegalităţile:

$$|a - b| < c,\ |b - c| < a,\ |c - a| < b.$$

Ridicînd la pătrat obţinem:

$$(a - b)^2 < c^2,\ (b - c)^2 < a^2,\ (c - a)^2 < b^2$$

şi, adunînd membru cu membru, vom avea:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Acum, adunînd în ambii membri $2(ab+bc+ca)$, obţinem inegalitatea cerută. Inegalitatea este strictă.

II) Evident că, dacă dintr-un număr dat scădem un număr pozitiv, obţinem un număr mai mic decît cel dat. Folosim atunci inegalităţile:

$$a^2 - (b - c)^2 \leqslant a^2,\ b^2 - (c - a)^2 \leqslant b^2,\ c^2 - (a - b)^2 \leqslant c^2.$$

Acestea se mai pot scrie:

$$(a - b + c)(a + b - c) \leqslant a^2,\ (b - c + a)(b + c - a) \leqslant b^2,$$

$$(c - a + b)(c + a - b) \leqslant c^2.$$

Avînd în vedere că ambii membri ai fiecărei inegalităţi sînt pozitivi, putem înmulţi membru cu membru şi obţinem:

$$(-a + b + c)^2 (a - b + c)^2 (a + b - c)^2 \leqslant a^2 b^2 c^2,$$

de unde:

$$(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) \leqslant abc.$$

Cum $a + b + c = 2p$ avem:

$$-a + b + c = 2(p - a),\ a - b + c = 2(p - b),\ a + b - c = 2(p - c),$$

deci:

$$8(p - a)(p - b)(p - c) \leqslant abc.$$

Egalitate obţinem pentru $a = b = c$, deci în triunghiul echilateral.

9. Fie N un număr cu proprietatea din enunţ. Să încercăm să construim un număr a astfel încît $N = a^2$.

Pentru că N se termină cu cifra 5, cu necesitate a trebuie să fie de forma $10b + 5$, deci $N = (10b + 5)^2 = 100b(b+1) + 25$. De aici rezultă că penultima cifră a lui N este 2. Antepenultima cifră este dată de ultima cifră a produsului $b(b + 1)$. Dar produsul a două numere consecutive se termină numai în una dintre cifrele 0, 2 sau 6. Cum 0 este exclus, iar cifrele nu se repetă rămîne că:

$$N = 1\,000c + 625 = a^2.$$

De aici rezultă că a se divide cu 25, $a = 100d + 25$.
Avem deci:

$$N = (100d + 25)^2 = 10\,000d^2 + 5\,000d + 625 = 1\,000(10d^2 + 5d) + 625 =$$
$$= 1\,000 \cdot 5d(2d + 1) + 625.$$

Cum $5d(2d+1)$ se termină numai în cifrele 0 sau 5, rezultă că înscrierea lui N, ca pătrat perfect, trebuie folosită cifra 5 cel puțin de două ori sau 0 care este exclus.

Rămîne că nu există, printre numerele din enunț, pătrate perfecte.

10. Fiecare echipă a disputat 14 meciuri. În total ar părea că s-au disputat $15 \cdot 14$ meciuri, dar, în acest fel, fiecare meci a fost numărat de două ori. Rezultă că numărul meciurilor disputate a fost $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$.

Cum ultima clasată are 21 puncte, iar în clasament nu sînt echipe cu același număr de puncte rezultă că numărul de puncte este mai mare sau cel mult egal cu:

$$21 + (21+1) + (21+2) \ldots + (21+14) = 15 \cdot 21 + \frac{14 \cdot 15}{2} = 420.$$

Pe de altă parte, cum la fiecare meci s-au acordat exact 4 puncte, deducem că numărul de puncte acordat a fost $105 \cdot 4 = 420$.

Din raționamentul de mai sus obținem că echipele au obținut punctajele $35, 34, \ldots, 22, 21$.

Să arătăm că echipa situată pe primul loc, cu 35 de puncte, a făcut, cu siguranță, cel puțin un meci nul.

Presupunem că nu a făcut nici un meci nul. Notînd cu x numărul victoriilor și cu y al înfrîngerilor, obținem sistemul:

$$x + y = 14;\ 3x + y = 35,$$

de unde $x = \frac{21}{2}$ și $y = \frac{7}{2}$, ceea ce este absurd, pentru că x și y sînt numere naturale.

11. Să presupunem că echipele vecine care au diferență maximă de puncte sînt situate pe locurile p, respectiv $p+1$.

Echipele care ocupă locurile $1, 2, 3, \ldots, p$ au disputat între ele $\frac{p(p-1)}{2}$ meciuri și au acumulat $2\frac{p(p-1)}{2} = p(p-1)$ puncte. În afară de aceasta, ele au mai jucat cu echipele de pe locurile $p+1, p+2, \ldots, n$ încă $p(n-p)$ jocuri și au acumulat în acest meci cel mult $2p \cdot (n-p)$ puncte.

Numărul de puncte acumulate de echipele de pe locurile $1, 2, \ldots, p$ nu va depăși:

$$p(p-1) + 2p(n-p) = p(2n-p-1).$$

Rezultă, de aici, că echipa de pe locul p a acumulat cel mult:

$$\frac{p(2n-p-1)}{p} = 2n - p - 1 \text{ puncte.}$$

Echipele de pe locurile $p+1, p+2, \ldots, n$ au jucat între ele $\frac{(n-p)(n-p-1)}{2}$ jocuri, acumulînd $(n-p)(n-p-1)$ puncte.

Rezultă că echipa de pe locul $p+1$ are în clasamentul final cel puțin $\frac{(n-p)(n-p-1)}{n-p} = n-p-1$ puncte.

Diferența maximă de puncte dintre echipele de pe locurile p și $p+1$ va fi:

$$(2n-p-1)-(n-p-1) = n.$$

Pentru ca problema să fie complet rezolvată este neapărat necesar să dăm un model de realizare a maximului. Diferența de n puncte se poate obține, de exemplu, astfel:

Echipa de pe primul loc cîștigă toate meciurile acumulînd $2n-2$ puncte, iar toate celelalte $n-1$ echipe fac meciuri egale între ele acumulînd fiecare:

$$\frac{n(n-1)-(2n-2)}{n-1} = n-2 \text{ puncte.}$$

12. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numerele alese astfel încît $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant 2\,000$. Trebuie să determinăm pe n astfel încît să existe, cu siguranță, a_i și a_j cu proprietatea $a_j - a_i = a_1$, deci $a_1 + a_i = a_j$. Considerăm toate numerele $a_1+a_2, a_1+a_3, \ldots, a_1+a_n$. Este posibil ca printre acestea să existe unul egal cu unul dintre numerele alese, începînd de la al treilea. Dar nu sîn-

Scanned with OKEN Scanner

tem siguri. Presupunem, deci, că nu există un astfel de număr. Considerăm intervalul $[a_1+1, a_1+2\,000]$. În acest interval se află exact 2 000 de numere naturale distincte. Dar, din ipoteză, $a_n \leqslant 2\,000$, deci, în acest interval, se află numerele $a_2, a_3, \ldots, a_n$ și, conform presupunerii făcute, și numerele a_1+a_2, a_1+a_3, a_1+a_4, $\ldots$, a_1+a_n care sînt, conform presupunerii făcute, diferite de $a_2, a_3, \ldots$, respectiv a_n. În concluzie, în intervalul considerat există cel puțin $2n-1$ numere. Cum în intervalul $[a_1+1, a_1+2\,000]$ sînt 2 000 de numere, pentru a fi siguri că problema este satisfăcută trebuie să avem:

$$2n-2 \geqslant 2\,001,$$

deci $n \geqslant 1\,002$. Minimul se atinge pentru $n = 1\,002$.

13. Notăm cu $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ numerele date astfel încît:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant 2n.$$

Orice număr a natural se poate scrie sau forma $a = 2^{\alpha} \cdot \beta$, unde α este număr natural, iar β număr natural impar.

Avem:

$$a_1 = 2^{\alpha_1} \cdot \beta_1,\ a_2 = 2^{\alpha_2} \cdot \beta_2,\ \ldots,\ a_n = 2^{\alpha_n} \cdot \beta_n,\ a_{n+1} = 2^{\alpha_{n+1}} \cdot \beta_{n+1}.$$

Dar între 1 și $2n$ există exact n numere impare deci, conform principiului cutiei, cu necesitate două dintre cele $n+1$ numere impare $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\ \beta_{n+1}$ trebuie să fie egale. Fie acestea β_i și β_j $(i < j)$. Avem $a_i = 2^{\alpha_i} \cdot \beta_i$ și $a_j = 2^{\alpha_j} \cdot \beta_j$. Rezultă de aici că a_i divide pe a_j, ceea ce trebuia demonstrat.

14. a) Facem următoarele notații:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = y_1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = y_2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = y_3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = y_4, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = y_5. \end{cases} \tag{1}$$

Avînd în vedere enunțul rezultă că numerele y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 sînt naturale nenule. Adunînd relațiile din (1) obținem:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1\,000. \tag{2}$$

Pe de altă parte, adunînd convenabil cîte două din relațiile (1), rezultă:

$$\begin{cases} 2x_1 = y_1 + y_2, \\ 2x_2 = y_2 + y_3, \\ 2x_3 = y_3 + y_4, \\ 2x_4 = y_4 + y_5, \\ 2x_5 = y_5 + y_1. \end{cases} \tag{3}$$

Se deduce din aceste ultime relații că numerele y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 au aceeași paritate și, deoarece $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1\,000$, înseamnă că sînt pare.

Din relațiile (3) și (2) se găsește ușor:

$$x_1 + x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{2}(1\,000 - y_5),$$

$$x_2 + x_4 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = \frac{1}{2}(1\,000 - y_1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie să calculăm $\max (x_1 + x_3)^{x_2+x_4}$, adică $\max \left[\frac{1}{2}(1\,000 - y_5)\right]^{\frac{1}{2}(1000-y_1)}$. Acesta se realizează cînd y_1 și y_5 sînt minime, deci cînd $y_1=y_5=2$. Rezultă $\max (x_1+x_3)^{(x_2+x_4)}=499^{499}$.

b) Problema revine la a calcula în cîte moduri distincte se pot alege numerele naturale nenule y_2, y_3, y_4 astfel încît $y_2 + y_3 + y_4 = 996$. Notînd $y_2 = 994 - 2k$ ($k = 1, 2, \ldots, 496$) rezultă $y_3 + y_4 = 2k + 2$, deci y_3 este un element al mulțimii $\{2, 4, \ldots, 2k\}$, prin urmare y_3 poate lua, în total, k valori posibile.

Pentru k fixat y_2 ia o valoare, iar y_3 ia k valori (y_4 este determinat de y_2 și y_3, prin relația $y_4 = 996 - y_2 - y_3$).

Cum k ia valori de la 1 la 496, numărul de moduri căutat este:

$$\sum_{k=1}^{496} k = \frac{496 \cdot 497}{2} = 123\,256.$$

15. Alegem punctele A' pe (BC), B' pe (CA) și C' pe (AB) astfel încît oricare dintre dreptele $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ să fie perpendiculare pe una din laturile triunghiului dat. Pentru aceasta este suficient ca dreptele $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ să fie fiecare paralelă cu o înălțime a triunghiului dat. Dacă A', B', C' sînt alese astfel încît:

$$\frac{A'C}{BC} = \frac{B'A}{CA} = \frac{C'B}{AB} = \frac{1}{3},$$

atunci triunghiul $A'B'C'$ este echilateral și $A'B' \perp BC$, $B'C' \perp AC$ și $C'A' \perp AB$.

Mai departe raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că există o partiție a lui E în submulțimile X și Y astfel încît nici X și nici Y să nu conțină vîrfurile unui triunghi dreptunghic.

Cel puțin două dintre punctele A', B' și C' aparțin aceleiași submulțimi. Presupunem că $A' \in X$ și $B' \in X$. Atunci toate punctele segmentului $[BC]$, cu excepția lui A', aparțin lui Y. Dacă un singur punct al lui $[BC] \setminus \{A'\}$ ar fi în X atunci acel punct împreună cu A' și B' sînt vîrfurile unui triunghi dreptunghic. Dacă $[BC] \setminus \{A'\}$ are toate punctele în Y atunci, neapărat, $C' \in X$. În caz contrar, punctele B, C' și proiecția lui C' pe BC, care este distinctă de A', sînt vîrfurile unui triunghi dreptunghic.

Dacă $C' \in X$ atunci, dintr-un raționament similar, rezultă că toate punctele lui $[AB]$, cu excepția lui C', aparțin lui Y, deci Y conține vîrfurile unui triunghi dreptunghic format din punctul B, un punct pe $[AB]$ diferit de B și C' și proiecția acestuia pe BC. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci răspunsul la întrebarea problemei este afirmativ.

16. Să observăm că fiecare dintre numerele de la 1 la n apare de exact n ori în acest tablou, deci de un număr impar de ori.

Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că există un număr a, $a \in \{1, 2\}$, astfel încît a să nu apară pe diagonala considerată. Cum numerele sînt dispuse simetric față de această diagonală, înseamnă că dacă unul dintre acestea apare de p ori de o parte a diagonalei, cu necesitate apare tot de p ori de cealaltă parte a aceleiași diagonale, deci, în total de $2p$ ori. Rezultă că numărul a considerat este scris de un număr par de ori, ceea ce contrazice faptul că fiecare apare de un număr impar de ori. Rezultă că toate numerele $1, 2, \ldots, n$ apar pe diagonala considerată.

17. Ridicăm la pătrat relația $|a_i| = |a_{i-1} + 1|$. Obținem:

$$a_i^2 = a_{i-1}^2 + 2a_{i-1} + 1.$$

Dăm valori lui i de la 2 la 50:

$$\begin{aligned}
a_2^2 &= a_1^2 + 2a_1 + 1,\\
a_3^2 &= a_2^2 + 2a_2 + 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_{49}^2 &= a_{48}^2 + 2a_{48} + 1,\\
a_{50}^2 &= a_{49}^2 + 2a_{49} + 1,
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi, însumînd, obţinem :

$$a_{50}^2 = a_1^2 + 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{49}) + 49.$$

Dar $a_1 = 0$. Adunăm în ambii membri $2a_{50} + 1$. Rezultă :

$$(a_{50} + 1)^2 = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{49} + a_{50}) + 50.$$

De aici avem :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{49} + a_{50} = \frac{(a_{50} + 1)^2 - 50}{2} = \frac{(a_{50} + 1)^2}{2} - 25$$

care, evident, este mai mare sau cel puţin egal cu -25.

Egalitate obţinem, de exemplu, pentru :

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{49} = 0;$$

$$a_2 = a_4 = \ldots = a_{50} = -1.$$

Generalizare. Dacă numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt astfel alese încît $a_1 = 0$ şi $|a_i| = |a_{i-1} + 1|$, pentru $i = 2, 3, \ldots, n$, atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant -\frac{n}{2}$. Demonstraţi !

18. Notăm cu S suma tuturor celor 25 de numere; cu s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 suma numerelor de pe liniile 1, 2, 3, 4, respectiv 5, cu s_1', s_2', s_3', s_4' şi s_5' suma numerelor de pe coloanele 1, 2, 3, 4, respectiv 5.

Avem :

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = s_1' + s_2' + s_3' + s_4' + s_5'.$$

Fie a_{ij} elementul aflat la intersecţia liniei i cu coloana j $(i, j = \overline{1,5})$. Atunci :

$$s_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} + a_{i5}, \tag{1}$$

$$s_j' = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + a_{4j} + a_{5j}. \tag{2}$$

Din enunţ avem $a_{ij} = s_i \cdot s_j'$ deci, înlocuind în (1) :

$$s_i = s_i \cdot s_1' + s_i \cdot s_2' + s_i \cdot s_3' + s_i \cdot s_4' + s_i \cdot s_5' = s_i(s_1' + s_2' + s_3' + s_4' + s_5') = s_i \cdot S,$$

de unde :

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = s_1 S + s_2 S + s_3 S + s_4 S + s_5 S,$$

adică :

$$S = S(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5).$$

Rezultă că $S = S^2$. De aici obţinem $S = 0$ sau $S = 1$.

Rămîne că suma celor 25 de numere este sau 0 sau 1.

Observaţie. Dacă, în plus, numerele ar fi fost nenegative, ar fi rezultat că suma lor este 1 sau 0 şi, în acest ultim caz, toate numerele ar fi fost egale cu 0.

Generalizare. Rezultatul nu se schimbă dacă, în loc de 25 de numere naturale, considerăm n^2 numere, $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstraţia urmează exact acelaşi curs.

19. Pentru $n = 0$ obţinem $2 + 2 = 4$, deci pătrat perfect.

Să presupunem că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încît $1 + \sqrt{28n^2 + 1} = k$, deci $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} = 2k$. Avem $k - 1 = \sqrt{28n^2 + 1}$ şi, prin ridicare la pătrat, $k^2 - 2k + 1 = 28n^2 + 1$, deci $k(k - 2) = 28n^2$ (1). Cu necesitate, de aici rezultă că numărul natural k este par. Relaţia (1) devine $p(p - 1) = 7n^2$, deci $7 | p$ sau $7 | p - 1$.

a) Dacă $7 | p$ atunci $p = 7q$, $q \in \mathbb{N}$, şi relaţia (1) devine $q(7q - 1) = n^2$. Dar numerele q şi $7q - 1$ sînt prime între ele şi rezultă că atît q cît şi $7q - 1$ trebuie să fie pătrate perfecte. Dar $7q - 1$ nu poate fi pătrat perfect.

b) Dacă $7 \nmid p - 1$ atunci, din faptul că p şi $p - 1$ sînt prime între ele, rezultă că $p = a^2$ şi $p - 1 = 7b^2$ astfel încît $a \cdot b = n$. Avem atunci :

$$2 + 2\sqrt{28n^2 + 1} = 2k = 4p = 4a^2 = (2a)^2.$$

C. PROBLEME COMENTATE DIN REVISTE STRĂINE

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I: Algebră 175
CAPITOLUL II: Geometrie 208

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

ALGEBRA

A.1. 1) *Să se justifice următoarele relații, în aparență stranii:*

$$\sqrt{5\,\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}\,;\quad \sqrt[3]{3\,\frac{3}{26}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}\,;$$

$$\sqrt[4]{2\,\frac{2}{15}} = 2\sqrt[4]{\frac{2}{15}}\,;\quad \sqrt[5]{2\,\frac{2}{31}} = 2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$$

și să se găsească forma generală a relațiilor de acest tip, care sînt corecte.

2) Să se determine alte numere naturale a *și* b *pentru care următoarele relații sînt corecte:*

$$\sqrt[a]{a+\frac{a}{b}} = a\sqrt[a]{\frac{a}{b}}\,,\ (b\neq 0);\quad \sqrt[a]{b+\frac{b}{a^b}} = b\sqrt[a]{\frac{b}{a^b}}\ (a\neq 0)$$

și să se exprime explicit soluțiile numere de o cifră și de două cifre.

Alpha, vol. 18, nr. 4, p. 86/1985

Soluție. 1. Avem:

$$\sqrt{5\,\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5\times 24+5}{24}} = \sqrt{\frac{125}{24}} = \sqrt{\frac{5\times 25}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}\,,$$

$$\sqrt[3]{3\,\frac{3}{26}} = \sqrt[3]{\frac{3\times 26+3}{26}} = \sqrt[3]{\frac{3\times 27}{26}} = 3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}\,,$$

și analoagele.

Examinînd aceste relații, prima se poate scrie:

$$\sqrt{5+\frac{5}{5^2-1}} = 5\sqrt{\frac{5}{5^2-1}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Iar cea de-a doua :

$$\sqrt[3]{3+\frac{3}{3^3-1}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{3^3-1}},$$

observații analoage fiind valabile și pentru celelalte două.

Generalizînd, să verificăm validitatea unei relații de forma :

$$\sqrt[n]{x+\frac{x}{x^n-1}}=x\sqrt[n]{\frac{x}{x^n-1}}, \tag{1}$$

cu $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$, $x\in(1,\infty)$.

Vom putea scrie, succesiv :

$$\sqrt[n]{x+\frac{x}{x^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{x^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{x^n\cdot x}{x^n-1}}=x\sqrt[n]{\frac{x}{x^n-1}}.$$

ceea ce arată că relația (1) este o identitate care cuprinde, ca niște cazuri particulare, relațiile propuse.

2) Ridicînd la puterea a ambii membri ai primei relații vom avea, succesiv :

$$a+\frac{a}{b}=a^a\times\frac{a}{b}\ ;\ 1+\frac{1}{b}=\frac{a^a}{b}\ ;\ b=a^a-1,\ (b\neq 0)$$

exprimînd, astfel, pe b în funcție de a.

Procedînd la fel în cea de—a doua relație obținem, pe rînd :

$$b+\frac{b}{a^b}=b^a\times\frac{b}{a^b}\ ;\ 1+\frac{1}{a^b}=\frac{b^a}{a^b}\ ;\ b^a=a^b+1. \tag{2}$$

Comentarii : Soluția generală a ecuației (2) nu este cunoscută. O soluție particulară a acesteia este $a=2$, $b=3$, care este valabilă și pentru relația $b=a^a-1$. Ecuația omogenă $b^a=a^b$ este rezolvată în numere raționale. Singura ei soluție în numere naturale diferite între ele este $a=2$, $b=4$. Este probabil că soluția $a=2$, $b=3$ pentru ecuația (2) este, de asemenea, unică în numere naturale.

A.2. *Sistemul :*

$$2m+n+p+q=38;\quad 2mq=p,\ \frac{n}{q}=\frac{3}{2},\ q=8m^3$$

a fost folosit pentru criptarea unui nume prin asocierea fiecăreia din soluțiile obținute uneia din literele alfabetului de la a la z, cele cu semne grafice foarte asemănătoare ca t și ț etc. fiind considerate identice.

Să se descifreze cuvîntul respectiv, m, n, p *și* q *fiind numere naturale strict pozitive.*

A. Körner, Alpha, vol. 18, nr. 4, p. 87/1984

Soluție, Vom exprima pe $q=\frac{2}{3}n$ în funcție de n și, introducînd în ultima ecuație, vom obține $\frac{2}{3}n=8m^3$, de unde $n=12m^3$, deci $q=\frac{2}{3}\times 12\,m^3=8m^3$. De ase-

menea, din $p = 2mq$ vom deduce $p = 16m^4$. Introducînd în prima ecuaţie dată, vom avea:

$$2m + 12m^3 + 16m^4 + 8m^3 = 38,$$

deci:

$$8m^4 + 10m^3 + m = 19.$$

Acestei ecuaţii trebuie să-i căutăm exclusiv soluţii în numere naturale. Una este vizibilă, $m = 1$ şi este unică, deoarece membrul întîi ia valori mai mari decît 19 pentru orice $m > 1$, ca sumă de termeni cu coeficienţii pozitivi care ia valoarea 19 pentru $m = 1$.

Soluţiile vor fi, deci, $m = 1$, $n = 12$, $p = 16$, $q = 8$.

Scriind literele alfabetului fără ă, î, ş, ţ, acestea vor fi în număr de 24. Numerotîndu-le de la 1 la 24 în ordine alfabetică, vom putea stabili următoarele corespondenţe:

$$m \to \text{a},\ n \to \text{l},\ p \to \text{p},\ q \to \text{h}.$$

În această ordine avem cuvîntul *alph*, dar, introducînd în prima ecuaţie, m apare de două ori, deci îl vom considera ca atare şi vom obţine *Alpha*, numele revistei din care am extras problema de faţă.

Comentarii: Revistele de matematici elementare străine cultivă cu asiduitate probleme distractive, jocuri matematice, criptograme etc, care măresc atractivitatea matematicii şi dezvoltă creativitatea.

Să observăm că problema rezolvată în cele ce precedă are un substrat matematic serios, fiindcă ajunge la o ecuaţie algebrică de gradul al IV-lea, care însă se rezolvă în mod unic prin cerinţa de a alege exclusiv soluţiile numere naturale.

A.3. *Să se rezolve în* $\mathbb{Z}$ *ecuaţia diofantică:*

$$n^2 + n + 1 = 19\lambda.$$

N.T./Alpha, vol. 18, nr. 4, p. 92/1984

Soluţie. Întrucît se cer soluţiile ecuaţiei în $\mathbb{Z}$, va trebui ca $\lambda \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia:

$$n^2 + n - 19\lambda + 1 = 0 \tag{1}$$

are ca soluţii:

$$n_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{76\lambda - 3}}{2}. \tag{1'}$$

Cum $n \in \mathbb{Z}$, va trebui ca:

$$76\lambda - 3 = k^2,$$

cu $k \in \mathbb{Z}$ şi $k = 2l + 1$, în care caz:

$$n_{1;2} = \frac{-1 \pm (2l+1)}{2} = \begin{cases} l; \\ -l-1. \end{cases} \tag{1''}$$

Ecuaţia $76\lambda - 3 = k^2$ admite o soluţie particulară:

$$\lambda = 3,\ k = 15,\ l = 7.$$

Scăzînd, membru cu membru, relaţiile $76\lambda - 3 = (2l + 1)^2$ şi $76 \cdot 3 - 3 = 15^2$ obţinem ecuaţia diofantică:

$$76\ (\lambda - 3) = (2l + 1)^2 - 15^2 = (2l + 16)(2l - 14)$$

sau, după simplificări:

$$19(\lambda - 3) = (l - 7)\ (l + 8). \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Punînd $l - 7 = 19\mu$, cu $\mu \in \mathbb{Z}$, vom deduce:

$$\lambda - 3 = (15 + 19\mu)\mu,$$

de unde rezultă soluțiile ecuației (2):

$$\lambda = 3 + (15 + 19\mu)\mu\,;\ l = 7 + 19\mu, \tag{2'}$$

din care deducem imediat valorile (1'') ale lui n:

$$n = 7 + 19\mu\,;\ n = -8 - 19\mu, \tag{3}$$

unde $\mu \in \mathbb{Z}$ este arbitrar.

Există, deci, două familii de soluții ale ecuației (1) în funcție de μ, λ avînd, de asemenea, expresia (2').

Comentarii: În revista *Alpha* această problemă este formulată astfel: *Să se demonstreze că* $n^2 + n + 1$ *este un multiplu de 19 pentru o infinitate de valori ale lui* n.

Soluția dată se bazează pe observația că:

$$n^2 + n + 1 = (n + 8)(n - 7) + 3 \cdot 19,$$

din care se deduce că polinomul dat este multiplu de 19 *numai atunci* cînd $n + 8$ sau $n - 7$ sînt multipli de 19, de unde $n = 19k - 8$ sau $n = 19k + 7$, unde $k = 0, 1, 2, \ldots$

Astfel, se obțin două șiruri infinite de multipli de 19 pentru $n^2 + n + 1$.

Problema este tratată numai în $\mathbb{N}$ și afirmația că polinomul este multiplu de 19 *numai atunci* cînd $n + 8$ sau $n - 7$ sînt multipli de 19, nu este justificată prin această rezolvare fiindcă se bazează pe o *descompunere particulară* în factori. De unde știm că nu există și alte descompuneri analoge care ar conduce la alte expresii pentru n?

Dacă am merge pe calea aleasă pentru rezolvare, ar trebui să scriem:

$$(n - p)(n - q) - 19\lambda \equiv n^2 + n + 1$$

și să găsim p, q și λ pentru care relația ar avea loc, pentru a putea da toate soluțiile și a putea spune *„atunci și numai atunci"*. Ori, acest gen de tratare ar conduce la:

$$p + q = -1\,;\ pq = 19\lambda + 1,$$

de unde:

$$p,\ q = \frac{-1 \pm \sqrt{-76\lambda - 3}}{2},$$

adică la valori comparabile cu (1') și vom fi obligați să rezolvăm o ecuație diofantică de forma $-76\lambda - 3 = k^2 = (2l + 1)^2$, deci am fi conduși la soluția dată de noi.

În tratarea problemei, în revista *Alpha* s-a observat că $\lambda = -3$ este o soluție care conduce la $p = 7$, $q = -8$ și apoi la $n = 19\alpha + 7$, $n = 19\beta - 8$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

Nimic nu ne spune că aceste soluții sînt exhaustive.

Aceste soluții corespund afirmației că, dacă sînt adoptate, *atunci* $n^2 + n + 1$ este un multiplu de 19, dar nu și *„numai atunci"*.

Problema, așa cum este formulată, cum este rezolvată de noi, oferă *mulțimea tuturor soluțiilor* și corespunde afirmației *„atunci și numai atunci"*, adică este o condiție necesară și suficientă pentru ca $n^2 + n + 1 - 19\lambda = 0$.

O altă soluție o obținem considerînd n de forma $19k + \varepsilon$, cu $k \in \mathbb{N}$ și $\varepsilon \in \{0, 1, 2, \ldots, 18\}$ și determinînd ε pentru care $n^2 + n + 1$ este multiplu de 19.

A.4. *Să se stabilească în ce condiții are loc inegalitatea:*

$$x^2 + xy + y^2 \geqslant x - y$$

în care $x, y \in \mathbb{Z}$. *Să se găsească valorile pentru care nu este valabilă și să se arate că există valori pentru care are loc egalitatea.*

N.T./Ontario Sec. School Math. Bull., vol. 20, nr. 2/1984

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Vom arăta, întîi, că $x \geqslant y$ este o ipoteză suficientă pentru inegalitatea propusă într-adevăr:

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$$

deci dacă $x < y$ inegalitatea este evidentă. Vom presupune, în consecință, $x \geqslant y$. (1)

Dacă $x = y$, inegalitatea devine $3x^2 \geqslant 0$ și este valabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și, cu atît mai mult, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

Vom presupune, deci, $x > y$ și vom face diverse ipoteze asupra semnelor acestora.

Dacă $x > 0$ și $y \geqslant 0$, cum $x - y > 0$, vom avea $x - y \leqslant x$ și cum $xy \geqslant 0$, iar $x^2 \geqslant x$, vom scrie $x^2 + xy + y^2 \geqslant x \geqslant x - y$ și inegalitatea va fi verificată.

Dacă $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$, cu $x > y$, $x - y > 0$, făcînd schimbările de variabile $x = -x'$, $y = -y'$, vom avea $x' \geqslant 0$, $y' \geqslant 0$ și $y' > x'$, $y' - x' > 0$, iar inegalitatea de dovedit devine:

$$x'^2 + x'y' + y'^2 \geqslant y' - x' > 0, \qquad (2$$

deci ne găsim în cazul precedent care a fost rezolvat.

Dacă $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, făcînd schimbarea de variabilă $y = -y'$, vom avea $y' \geqslant 0$, $x - (-y) = x + y' > 0$ și $x^2 - xy' + y'^2 \geqslant x + y' > 0$ care se mai poate scrie:

$$(x - y')^2 + xy' \geqslant x + y' > 0. \qquad (2')$$

Să considerăm, în particular, inegalitatea:

$$xy' \geqslant x + y'. \qquad (2'')$$

Dacă $y' = 1$, aceasta nu este verificată pentru nici un $x > 0$, *iar pentru* $y' = 1$ *și* $x = 1$, *nu este verificată nici* (2').

Dacă $x > 1$ și $y' = 1$, (2') devine:

$$(x - 1)^2 + x \geqslant x + 1,$$

deci $(x - 1)^2 \geqslant 1$ și este verificată pentru $x \geqslant 2$.

Dacă $y' > 1$, inegalitatea (2'') este verificată pentru orice pereche de întregi naturali cu $x > 1$.

Cazul $x = 1$, $y' > 1$ revine la:

$$(y' - 1)^2 + y' \geqslant y' + 1,$$

cînd inegalitatea este verificată pentru $y' \geqslant 2$.

Cazul $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$ nu poate avea loc deoarece $x - y > 0$.

În concluzie, *inegalitatea* (2) *are loc pentru orice pereche* x, y *de întregi, cu excepția lui* $x = 1$, $y = -1$.

Egalitatea are loc, de exemplu, pentru $x = y = 0$ și pentru $x = 2$, $y = -1$.

Comentarii: Inegalitatea stabilită este folosită în problema determinării soluțiilor în $\mathbb{Z}$ ale ecuației diofantice $x^3 - y^3 = 1729$, din aceeași revistă, fără a fi demonstrată. Se afirmă că $x = 1$, $y = -1$ sînt valori excepționale în care inegalitatea nu are loc, iar problema de a stabili și existența unor valori pentru care se obține egalitatea, nu se pune.

Menționăm că soluția noastră nu dă decît un cuplu de valori, dar nu obține toate soluțiile.

Problema poate reveni la rezolvarea ecuației:

$$x^2 + xy + y^2 = x - y$$

sau:

$$(x - y)^2 + 3xy = x - y$$

și punînd $x - y = z$, la ecuația $z^2 - z + 3xy = 0$, care trebuie să aibă soluții $z \in \mathbb{Z}$, de unde:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12xy}}{2},$$

Scanned with OKEN Scanner

cu $1-12xy = k^2 = (2l-1)^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$ și deci $l^2 - l + 3xy = 0$, care este aceeași cu ecuația în z.

O soluție se obține imediat pentru $x=2, y=-1$, cînd $z = \frac{1 \pm 5}{2}$ deci $x - y = 3$, $x - y = -2$ (în contradicție cu $x - y > 0$, iar prima fiind verificată de $x = 2$, $y = -1$).

Cazul general revine la determinarea punctelor de coordonate întregi pe elipsa de ecuație:

$$x^2 + xy - x + y = 0.$$

A.5. *Să se determine* $x, y \in \mathbb{Z}$, *care verifică ecuația:*

$$x^3 - y^3 = 1729.$$

Ontario Sec. School Mathematics Bulletin, vol. 20, nr. 2, p. 9/1984

Soluție. Folosim descompunerea:

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1729 \tag{1}$$

și vom observa că factorul $x^2 + xy + y^2$ este pozitiv. Într-adevăr, putem scrie:

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0 \tag{1'}$$

sau, împărțind cu $y^2 > 0$ și punînd $\frac{x}{y} = z$, vom avea:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 = z^2 + z + 1 > 0$$

fiindcă realizantul trinomului în z este $1 - 4 = -3 < 0$, deci trinomul își păstrează semnul care este pozitiv.

Din (1) deducem că $x - y > 0$ și că împreună cu $x^2 + xy + y^2$ trebuie să fie factori ai lui 1729. În plus:

$$x^2 + xy + y^2 \geqslant x - y \tag{2}$$

pentru x *și* y *întregi pozitivi sau negativi, exceptînd cazul* $x = 1$, $y = -1$, după cum rezultă din problema anterioară.

Cum $1729 = 7 \times 13 \times 19$, vom nota:

$$x - y = \alpha, \qquad x^2 + xy + y^2 = \beta \tag{3}$$

cu $\alpha \leqslant \beta$, unde $(\alpha, \beta) = (1, 1729)$ sau $(7, 13 \times 19 = 247)$ sau $(13, 7 \times 19 = 133)$ sau $(19, 7 \times 13 = 91)$.

Sistemul (3) trebuie rezolvat în $\mathbb{Z}$. Eliminarea lui x conduce la ecuația:

$$3y^2 + 3\alpha y + (\alpha^2 - \beta) = 0, \tag{3'}$$

unde va trebui să introducem cele patru cupluri (α, β) de valori. Obținem 4 ecuații de gradul al II-lea în y, care trebuie să furnizeze rădăcini întregi:

$$y^2 + y - 576 = 0; \quad y^2 + 7y - 66 = 0;$$

$$y^2 + 13y + 12 = 0; \quad y^2 + 19y + 90 = 0.$$

Dintre acestea, primele două nu au soluții întregi, cum se poate verifica ușor.

Din a treia deducem $y_1 = -1$ și $y_2 = -12$, cărora le corespund $x_1 = 12$ și $x_2 = 1$.

Din a patra obținem $y_3 = -9$ și $y_4 = -10$, cu $x_3 = 10$ și $x_4 = 9$.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația dată va avea, deci, patru soluții în numere întregi și anume:

$$(12, -1),\ (1, -12),\ (10, -9),\ (9, -10).$$

Comentarii: Metoda folosită se bazează, în primul rînd, pe descompunerea primului membru în doi factori ireductibili în inelul $\mathbb{Z}[X]$. Într-adevăr, cum $x^2 + xy + y^2$ este o sumă de pătrate de forme liniare, este *nedecompozabilă* în factori reali.

De aceea, după ce stabilim că ambii factori sînt pozitivi și că are loc inegalitatea (2) care face ca primul factor să fie mai mic decît cel de-al doilea, știm să folosim descompunerea în factori primi a membrului al doilea, eliminînd un număr de 4 cupluri (α, β).

Rezolvarea sistemului (3) trebuie efectuată tot în numere întregi, ceea ce impune restricții de tip diofantic. Din fericire, două dintre ecuații admit astfel de soluții care, în plus, sînt și negative. Ecuația $x - y = \alpha$ ne asigură apoi soluții pozitive pentru x și deci, și satisfacerea condiției $x - y > 0$.

Problema este deosebit de utilă din punct de vedere metodologic, fiindcă provoacă folosirea de strategii variate și raționamente fine prin cerințe de ordin calitativ. În plus, inegalitatea (2), dacă ar fi fost necesar să fie stabilită în cursul problemei, ar fi necesitat rezolvarea unei probleme încă mai grea decît cea propusă.

A.6. *Se dau șirurile:*

a) 5, 7, 11, 19, ...

b) 2, 6, 12, 20, ...

c) 0, 1, 1, 2, 3, 5, ...

d) 1, 2, 3, 5, 7, 11, ...

1) Se cere pentru fiecare să se extrapoleze) pe baza unei legi de formare dedusă din succesiunea primilor lor termeni menționați în enunț.*

2) Să se determine o expresie explicită a termenilor generali, acolo unde se poate.

N.T./ S. M. P. Book 1, p. 270/1966

Soluție. Să observăm, pentru șirul a), că avem următoarele diferențe a doi termeni consecutivi:

$$2 = 7-5,\ 4 = 11-7,\ 8 = 19-11, \ldots$$

Notînd cu $u_1, u_2, \ldots$ termenii succesivi, avem $u_1=5$, $u_2 = 7, \ldots, u_2 - u_1 = 2$, $u_3 - u_2 = 2^2$, $u_4 - u_3 = 2^3$ și astfel o lege care se impune este: fiecare termen se deduce din precedentul adăugînd 2^p, unde u_p este termenul precedent; deci $u_{p+1} = u_p + 2^p$ este relația de recurență caracteristică șirului.

Scriind, pe rînd:

$$u_p = u_{p-1} + 2^{p-1},\ u_{p-1} = u_{p-2} + 2^{p-2}, \ldots, u_2 = u_1 + 2$$

și adunînd relațiile, membru cu membru, vom obține:

$$u_{p+1} = u_1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^p$$

cu $u_1 = 5$.

Suma $2 + 2^2 + \ldots + 2^p$ este o progresie geometrică de rație 2 a cărei sumă va fi $2^{p+1} - 2$ astfel încît $u_{p+1} = 3 + 2^{p+1}$ este expresia termenului general. Deci, în particular, după 19 vom avea în șir $u_5 = 2^5 + 3 = 35$, $u_6 = 2^6 + 3 = 67$ etc.

Pentru șirul b), diferențele dintre termenii succesivi sînt 4, 6, 8, 10, ... deci șirul numerelor pare. Vom putea scrie:

$$u_2 - u_1 = 2 \cdot 2,\ u_3 - u_2 = 2 \cdot 3, \ldots, u_p - u_{p-1} = 2p$$

---

*) Celor care nu cunosc semnificația termenului respectiv le recomandăm să citească mai întîi primul alineat de la *Comentarii* (v. pag. 183).

Scanned with OKEN Scanner

sau:

$$u_2 = u_1 + 2 \cdot 2,\ u_3 = u_2 + 2 \cdot 3, \ldots, u_p = u_{p-1} + 2p.$$

Adunînd relaţiile, membru cu membru ca în cazul a), vom avea:

$$u_p = u_1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2p = u_1 + 2(2 + 3 + \ldots + p)$$

În paranteză avem şirul primelor p numere naturale mai puţin 1, deci:

$$2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2} - 1$$

şi $u_1 = 2$ astfel încît:

$$u_p = 2 + p(p+1) - 2 = p(p+1).$$

Pentru şirul c), diferenţele nu mai pun în lumină nici o regulă. Observăm însă că $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$ etc. Regula de formare este relaţia de recurenţă:

$$u_{p+1} = u_p + u_{p-1},$$

cu $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$.

Acest şir este celebrul *şir al lui Fibonacci* şi termenul său general poate fi determinat, ceea ce vom face în comentariile la această problemă.

Pentru şirul d), datele de care dispunem sînt insuficiente pentru a găsi o regulă. Diferenţele pot fi interpretate oricum, fiindcă sînt: 1, 1, 2, 2, 4, ... Le putem considera ca $1 \cdot 1$, $2 \cdot 1$, 2^2, ... şi am putea extrapola această diferenţă astfel:

$$u_2 - u_1 = 1,\ u_3 - u_2 = 1,\ u_4 - u_3 = 2,\ u_5 - u_4 = 2,$$

$$u_6 - u_5 = 4,\ u_7 - u_6 = 4, \ldots, u_{2p-1} - u_{2p-2} = 2^{p-2},$$

$$u_{2p} - u_{2p-1} = 2^{p-1},\ u_{2p+1} - u_{2p} = 2^{p-1}.$$

Din aceasta deducem, adunînd membru cu membru:

$$u_{2p+1} - u_{2p-1} = 2^{p-1} + 2^{p-1} = 2^p$$

şi:

$$u_{2p} - u_{2p-2} = 2^{p-1} + 2^{p-2} = 3 \cdot 2^{p-2}.$$

Făcînd apoi $p \to p - 1$, $p - 2, \ldots, 1$ vom obţine, prin adunare membru cu membru:

$$u_{2p+1} - u_1 = 2^p + 2^{p-1} + \ldots + 2 = 2^{p+1} - 1 - 1,$$

deci $u_{2p+1} = 2^{p+1} - 1$, iar:

$$u_{2p} - u_2 = 3(2^{p-2} + 2^{p-3} + \ldots + 1) = 3(2^{p-1} - 1),$$

deci $u_{2p} = 3 \cdot 2^{p-1} - 1$.

Avem aici un exemplu în care există două legi de formare a termenului general al şirului, după paritatea indicelui:

$$u_{2p+1} = 2^{p+1} - 1,\ u_{2p} = 3 \cdot 2^{p-1} - 1;\ p = 1, 2, \ldots,\ u_1 = 1.$$

Să observăm că şirul d) mai poate fi considerat ca fiind format de primele 6 numere prime şi deci se poate extrapola prin şirul infinit al numerelor prime, al cărui termen general nu are o reprezentare generală.

Indicaţiile date în *Teacher's Guide Book* 1, p. 188 nu fac decît să pună în evidenţă şirurile diferenţelor dintre termenii consecutivi în cazurile a) şi b), extrapolînd şirurile cu primii termeni care ar urma prelungind şirurile diferenţelor cu cîte un termen cum ar fi 2, 4, 8, 16 căruia îi corespunde în şir 35 sau 6, 8, 10, căruia îi corespunde în şirul b), 30.

În ce priveşte şirul c), al lui FIBONACCI, se dă indicaţia de a se aduna cîte doi termeni consecutivi:

$$0 + 1 = 1,\ 1 + 1 = 2,\ 1 + 2 = 3,$$

astfel încît după $2 + 3 = 5$ se formează $3 + 5 = 8$, adăugindu-se 8 şirului. Se adaugă indicaţia că în *Book 2* se vor găsi aplicaţii şi aspecte ale acestui şir.

În ceea ce priveşte şirul d) se observă că, excluzînd pe 1, care nu se găseşte în şir aşa cum este dat, şirul este format din primele numere prime şi se extrapolează cu 13.

Problema formulată de noi pe baza acestui exerciţiu are cerinţe mult mai mari şi cea de a doua conduce la însumarea termenilor pe baza relaţiilor de recurenţă găsite.

Atragem atenţia asupra şirului d) unde, speculînd încercările posibile, pe baza estimării diferenţelor, am fost conduşi la un şir cu două legi de structură şi am calculat expresiile termenului general care diferă între ele după paritatea indicelui. Se vede că, folosind ca surse de inspiraţie exerciţiul menţionat, am fost conduşi la o problemă cu un conţinut mai larg şi necesitînd tehnici de rezolvare pe care le socotim instructive.

Comentarii : Problema este o extindere a unui exerciţiu de spirit de observaţie şi de căutare de reguli de organizare în unele şiruri numerice. Extrapolarea unor regularităţi este o metodă de încercare de asociere a unor legi generale de structură a unor şiruri. Fizicienii şi, în general, cercetătorii în ştiinţele experimentale sau de observaţie practică în mod curent această metodă de investigaţie. Ei trec chiar de la o repartiţie discretă la una continuă, ajustînd diverse grafice reprezentabile prin funcţii, care devin legi de fenomene, dacă se verifică în practică într-un număr suficient de cazuri. Astfel de legi se aşează la baza unor teorii, care se dezvoltă şi se confruntă cu altele care au fost adoptate şi sînt considerate ca satisfăcătoare ca modele matematice ale realităţii.

Exerciţiul este cuprins în capitolul intitulat „*Puzzle Corner*" (Colţul încurcăturilor, şaradelor) din manualul experimental *School Mathematics Project Book 1*, p. 270. Anglo-saxonii practică acest gen glumeţ de a introduce, prin analogie cu jocurile de compunere de figuri inteligibile din bucăţi tăiate neregulat care trebuie să fie aşezate şi compuse în imagini complete aparent distractiv, dar care cer eforturi inedite de gîndire constructivă. Acolo este formulat astfel :

Ce urmează acum?

a) 5, 7, 11, 19, . . ., *b) 2, 6, 12, 20, . . .,*

c) 0, 1, 1, 2, 3, 5, . . ., d) 2, 3, 5, 7, 11, . . .,

Şirul lui FIBONACCI *(termenul general).*

În privinţa celebrului şir al lui FIBONACCI, vom căuta expresia termenului său general, folosind ca sursă de inspiraţie : *N. Mihăileanu*, Istoria matematicii, vol. I, anexă, p. 286, Ed. Enciclopedică Română, 1974, cu uşoare modificări pentru a explica folosirea ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$ a secţiunii de aur.

Legea de recurenţă fiind $u_{p+1} = u_p + u_{p-1}$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, valorile iniţiale sînt necesare ambele fiindcă recurenţa leagă 3 termeni consecutivi. Vom scrie $u_{p+1} - u_p - u_{p-1} = 0$ şi vom încerca să separăm cîte 2 termeni consecutivi în fiecare membru, pentru a reduce legea la o recurenţă cu 2 termeni. Vom scrie, deci :

$$u_{p+1} - \lambda u_p = \mu(u_p - \lambda u_{p-1}) \qquad (1)$$

cu λ, μ parametri reali.

Identificînd şi ţinînd seama de relaţia de recurenţă obţinem :

$$u_{p+1} - (\lambda + \mu)u_p + \lambda\mu u_{p-1} = 0,$$

de unde $\lambda + \mu = 1$, $\mu\lambda = -1$.

Ecuaţia de gradul al doilea avînd ca rădăcini λ, μ este :

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

adică tocmai ecuaţia *secţiunii de aur* pentru $a = 1$ ($x^2 - ax - a^2 = 0$).

Făcînd, succesiv, $p \to p - 1$, $p - 2$, . . ., 1 obţinem şirul de egalităţi :

$$u_{p+1} - \lambda u_p = \mu(u_p - \lambda u_{p-1}) = \mu^2(u_{p-1} - \lambda u_{p-2}) = \ldots = \mu^p(u_1 - \lambda u_0) = \mu^p \qquad (2)$$

şi, permutînd λ cu μ, prin simetrie :

$$u_{p+1} - \mu u_p = \lambda(u_p - \mu u_{p-1}) = \ldots = \lambda^p(u_1 - \mu u_0) = \lambda^p \qquad (2')$$

Eliminînd pe u_{p+1} între :

$$u_{p+1} - \lambda u_p = \mu^p$$

și:

$$u_{p+1} - \mu u_p = \lambda^p$$

obținem expresia lui u_p:

$$u_p = \frac{\lambda^p - \mu^p}{\lambda - \mu}$$

cu $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, (3)

ele fiind rădăcini ale ecuației secțiunii de aur. Astfel, termenul general al șirului lui FIBONACCI va fi:

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p\right]. \quad (3')$$

Proprietățile acestui șir l-au făcut pe FIBONACCI, pe bună dreptate, celebru. Vom adăuga observația următoare: cum λ și μ sînt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 1 = 0$, vom avea $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, $\mu^2 - \mu - 1 = 0$ și din:

$$\lambda = 1 + \frac{1}{\lambda}, \qquad \mu = 1 + \frac{1}{\mu}$$

înmulțind în ambii membri respectiv cu λ^p și μ^p, obținem:

$$\lambda^{p+1} = \lambda^p + \lambda^{p-1}, \quad \mu^{p+1} = \mu^p + \mu^{p-1}.$$

Astfel, se formează două șiruri ale lui FIBONACCI de forma:

$$1, 0, 0^2, \ldots, 0^p, \ldots, 1, \mu, \mu^2, \ldots, \mu^p, \ldots$$

deci $u_p = 0^p$, $v_p = \mu^p$ și $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_0 = 0$, $v_1 = 1$, $v_2 = \mu$, $v_0 = 0$.

A.7. *Dacă* $x + \frac{1}{x} = -1$ *să se găsească valoarea expresiei* $x^{999} + \frac{1}{x^{999}}$, *cu* $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ontario Sec. Sch. Math. Bull, vol. 20, p. 11., nr. 2/1980

Soluția I. Presupunînd $x \neq 0$, din relația de condiție deducem $x^2 + 1 = -x$ și, înmulțind ambii membri cu x, avem:

$$x^3 + x = -x^2$$

sau:

$$x^3 = -x^2 - x = -x^2 + (x^2 + 1) = 1.$$

În același timp:

$$x^{999} + \frac{1}{x^{999}} = (x^3)^{333} + \frac{1}{(x^3)^{333}} = 1 + 1 = 2.$$

Soluția a II-a. Din $x + \frac{1}{x} = -1$ deducem $x^2 + x + 1 = 0$, ecuație care nu are rădăcini reale. Înmulțind însă ambii membri cu $x - 1$, obținem relația:

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1 = 0,$$

de unde $x^3 = 1$.

Finalizarea soluției este ca în soluția I.

Comentarii : Problema se poate generaliza imediat, cerînd valoarea unei expresii de forma

$$x^{3n} + \frac{1}{x^{3n}}$$

cu $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfăcînd $x + \frac{1}{x} = -1$, cu n număr natural.

Problema poate fi generalizată și mai mult, astfel :

Dacă

$$x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{x^{n-1}} = -1, \quad x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{1}$$

să se găsească valoarea expresiei :

$$x^p + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^{2p}} + \ldots + \frac{1}{x^{(n-1)p}} \tag{2}$$

cu $p \in \mathbb{Z}$, *multiplu de* $n + 1$.

Înmulțind în relația (1), după eliminarea numitorului, cu $x - 1$, obținem :

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$$

și

$$(x - 1)(x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1) = 0$$

de unde $x^{n+1} = 1$.

Este suficient să punem (2) sub forma :

$$(x^{n+1})^{\frac{p}{n+1}} + \frac{1}{(x^{n+1})^{\frac{p}{n+1}}} + \frac{1}{(x^{n+1})^{\frac{2p}{n+1}}} + \ldots + \frac{1}{(x^{n+1})^{\frac{(n-1)p}{n+1}}}$$

și să punem $x^{n+1} = 1$, pentru a obține :

$$x^p + \frac{1}{x^p} + \ldots + \frac{1}{x^{(n-1)p}} = n \tag{3}$$

pentru orice $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, p multiplu de $n + 1$ și $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geqslant 2$.

Pentru $n = 2$ regăsim expresia din enunț, luînd $p = 999$.

Este clar că se pot face și alte numeroase generalizări, mai surprinzătoare.

A.8. *Să se demonstreze iraționalitatea lui* $\sqrt{2}$ *folosindu-se faptul că trebuie demonstrat că mulțimea* S *a numerelor naturale* n, *pentru care* $n\sqrt{2}$ *este un număr natural, este vidă.*

T. Estermann, The mathematical Gazette, vol. 59, nr. 408/1975

Soluție. Să presupunem că S nu este vidă și în acest caz $\sqrt{2}$ este un număr rațional de forma $\frac{p}{q}$ cu p, q numere naturale, $p > q$ și $(p, q)_* = 1$. În acest caz, există o infinitate de numere naturale n astfel încît $n\sqrt{2} = n\frac{p}{q}$, să fie un număr natural. Mulțimea S are atunci un element minimal, care este q.

Scanned with OKEN Scanner

Așa fiind, să considerăm numărul $(\sqrt{2}-1)q = q\sqrt{2} - q > 0$ care este natural (și egal cu $p - q$). Atunci:

$$(\sqrt{2}-1)\,q\sqrt{2} = 2q - q\sqrt{2}$$

este, de asemenea, natural și deci $(\sqrt{2}-1)q \in S$. Dar $(\sqrt{2}-1)q < q$, ceea ce contrazice faptul că q este elementul minimal al lui S. În consecință, S este vidă și $\sqrt{2}$ este irațional.

Comentarii: Problema este extrasă de noi dintr-o notă intitulată *„Iraționalitatea lui $\sqrt{2}$"* semnată de T. ESTERMANN, care o propune ca o demonstrație a iraționalității lui $\sqrt{2}$, mai simplă decît cea clasică, atribuită, în general, lui PITAGORA.

Autorul atrage atenția că demonstrația poate fi extinsă la rădăcina pătrată a oricărui număr natural, care este sau un întreg sau un număr irațional.

A.9. *Fiind dat numărul real $n > 1$, să se arate că partea întreagă $[\sqrt{n}]$ a rădăcinii sale pătrate se poate calcula prin scăderi numerice a primelor numere impare 1, 3, 5, ...pînă la un rang $2m-1$ unic determinat.*

N. T./K. D. Fryer, Ontario Math. Sec. Sch. Math. Bull., vol. 19, nr. 3/1983

Soluție. Se cunoaște suma primelor m numere impare:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2m-1) = m^2.$$

De asemenea, orice număr real $n > 0$ este cuprins între pătratele a două numere naturale m și $m+1$, respectiv:

$$m^2 \leqslant n < (m+1)^2. \tag{1}$$

Dacă n este pătratul perfect al unui număr natural, vom lua $m^2 = n$ și vom avea $m^2 = n < (m+1)^2$.

Dacă nu este pătrat perfect va exista m număr natural, astfel încît:

$$m^2 < n < (m+1)^2.$$

Evident, putem aproxima pe n și prin exces, punînd $n = (m+1)^2$, cînd $m^2 < n = (m+1)^2$ sau $m^2 < n < (m+1)^2$.

În cele ce urmează este necesară aproximarea prin lipsă, fiindcă se cere partea întreagă a lui $\sqrt{n}$. Vom scrie, deci:

$$n - m^2 \geqslant 0, \quad n \geqslant m^2,$$

prin urmare $n = m^2 + r$, cu $r > 0$, de unde:

sau:

$$m^2 \leqslant m^2 + r < (m+1)^2$$

$$r < 2m + 1. \tag{1'}$$

Din relația $n - m^2 = r$, cu $r < 2m+1$, deducem:

cu:

$$n - 1 - 3 - 5 - \ldots - (2m-1) = r$$

$$r < 2m + 1. \tag{2}$$

Dacă $n \leqslant 1$, vom avea și $\sqrt{n} \leqslant 1$ și $[\sqrt{n}] = 0$, deci algoritmul (2) nu se aplică. Dacă însă $n > 1$, $\sqrt{n} > 1$, și deci $[\sqrt{n}] > 1$, astfel încît algoritmul (2) este aplicabil în modul următor:

Pasul I: $n-1=r$, $m=1$. Dacă $r<3$, vom avea $1 \leqslant \sqrt{n} < 2$ și deci $[\sqrt{n}]=1$. Dacă $r>3$, urmează:

Pasul II: $n-1-3=n-4=n-2^2=r$, $m=2$. Dacă $r<5$, vom scrie $2 \leqslant \sqrt{n} < 3$ și deci $[\sqrt{n}]=2$. Dacă $r>5$, urmează:

Pasul III: $n-1-3-5=n-9=n-3^2=r$, $m=3$;

. . . . . .

Pasul m: $n-1-3-5\ldots-(2m-1)=n-m^2=r$;

dacă $r<2m+1$, vom avea $m \leqslant \sqrt{n} < m+1$, deci $[\sqrt{n}]=m$;

dacă $r \geqslant 2m+1$, urmează pasul $m+1$ etc.

Se vede că algoritmul este unic determinat de condiția $r<2m+1$.

Comentarii: Problema este inspirată de articolul *„Cîte ceva despre rădăcina pătrată"* sub semnătura lui K. D. FRYER în *Ontario Sec. Scholl Math. Bull., vol. 19, nr. 3/1983*. Autorul a fost stimulat să scrie acest articol de întrebarea unui elev: „Cum se aplică metoda lui NEWTON de calcul al rădăcinilor pătrate?", la care el a răspuns că este sigur că în manual algoritmul este explicat suficient de clar. Însă, consultînd manualul, a constatat că demonstrația de acolo este prea complicată pentru elevii din clasa respectivă.

La rîndul nostru, făcînd reflecția că dificultățile de înțelegere sînt prezente pretutindeni în manuale, am fost îndemnați să extragem unele sugestii din articolul acestui autor pentru a le prezenta într-o formulare și o metodologie proprie.

Vom exemplifica algoritmul pe care l-am formulat prin calculul părții întregi $[\sqrt{19}]$ pe care autorul îl prezintă în lucrare în alt mod, în vederea aproximării $\sqrt{19} \simeq 4+\frac{3}{8}$, menționînd, în treacăt, unele concesii făcute rigoarei în întreg articolul, desigur pentru o mai ușoară înțelegere.

Pasul I: $19-1=18$, $r=18$; $m=1$, $r>3$, deci:

Pasul II: $18-3=15$, $r=15$, $m=2$, $r>5$, deci:

Pasul III: $15-5=10$, $r=10$, $m=3$, $r>7$, deci:

Pasul IV: $10-7=3$, $r=3$, $m=4$, $r<9$, deci *stop*.

$19^2=4^2+3$ și $[\sqrt{19}]=4$ și $r=3$.

A.10. *Fie* $n>0$ *un număr real și* $a<b$ *alte două numere reale astfel încît* $n=ab$.

Folosind inegalitatea dintre mediile aritmetică și geometrică, să se găsească o metodă de calcul aproximativ al lui $\sqrt{n}$ *în funcție de* a *și* b *(Metoda* NEWTON *de iterație).*

N. T./K. D. Fryer, Ontario Sec, School, Math. Bull., vol. 19, nr. 3/1983

Soluție. Dacă $a=b$, vom avea $n=a^2=b^2$, de unde $\sqrt{n}=a=b$. Vom presupune, deci, $a<b$. În acest caz are loc inegalitatea:

$$a<\sqrt{ab}<b, \tag{1}$$

ușor de stabilit, majorînd sau minorînd pe $\sqrt{ab}$:

$$\sqrt{ab}<\sqrt{bb}=b, \quad \sqrt{ab}>\sqrt{aa}=a.$$

Deducem imediat:

$$a<\sqrt{n}<b. \tag{1'}$$

De asemenea:

$$a < \frac{a+b}{2} < b, \tag{2}$$

iar din inegalitatea mediilor:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{n}. \tag{2'}$$

Introducînd în (2), vom avea:

$$a < \sqrt{n} < \frac{a+b}{2} < b, \tag{3}$$

fiindcă $a < b$ și în inegalitatea mediilor se obține egalitate dacă și numai dacă $a = b$. Dubla inegalitate (3), ținînd seama și de $n = ab$, ne dă o aproximare prin exces a lui $\sqrt{n}$, mai bună decît $\sqrt{n} < b$.

Aceasta poate fi îmbunătățită prin iterare astfel: să notăm:

$$\frac{a+b}{2} = b_1, \quad \frac{n}{b_1} = a_1, \tag{4}$$

de unde $n = a_1 b_1$. În același timp:

$$a_1 = \frac{n}{b_1} < \frac{n}{\sqrt{n}},$$

fiindcă $\sqrt{n} < b_1$ conform cu (3).

Vom avea din nou inegalitatea dublă:

$$a_1 < \sqrt{n} < b_1 \tag{4'}$$

cu $n = a_1 b_1$, deci ne găsim în condițiile (1'), fiind conduși la:

$$a_1 < \sqrt{n} < \frac{a_1 + b_1}{2} < \frac{a+b}{2} = b_1, \tag{5}$$

în analogie cu (3).

Am obținut, în acest fel, o mai bună aproximare prin exces a lui $\sqrt{n}$ și procedeul poate fi iterat. Este clar că iterațiile se exprimă toate în funcție de a și b.

Comentarii: Metoda lui NEWTON de iterare aplicată aproximării rădăcinilor pătrate este folosită de autorul articolului: „Cîte ceva despre rădăcina pătrată", publicate în *Ontario Sec. School, Math. Bull., vol. 19, nr. 3/1983*, fără o prezentare explicită, ci numai prin evocare și o indicație, bazată pe algoritmul prezentat de noi în problema anterioară. Enunțul problemei este formulat de noi, iar soluția, sub forma de mai sus, este obținută prin sistematizarea și precizarea explicațiilor date de autor pentru elevii săi asupra metodei lui NEWTON. El se mulțumește să atragă atenția că $\frac{a+b}{2}$ este o aproximație mai bună a lui $\sqrt{n}$ decît b și să indice metoda lui NEWTON prin notațiile (4) și indicația repetării aproximației prin $\frac{a_1+b_1}{2}$, fără a demonstra legitimitatea acesteia, cuprinsă în tripla inegalitate (5). Pentru a ilustra metoda lui NEWTON, așa cum reiese din problema enunțată și rezolvată de noi în cele ce pre-

Scanned with OKEN Scanner

cedă, vom face o aplicație luînd $a = 1$, $b = n$ și deci $ab = 1 \cdot n = n$. O primă aproximație va fi dată de (3):

$$1 < \sqrt{n} < \frac{n+1}{2} < n,$$

dacă $n > 1$, iar o a doua se obține luînd, conform cu (4):

$$b_1 = \frac{n+1}{2}, \quad a_1 = \frac{n}{b_1} = \frac{2n}{n+1}, \tag{6}$$

care conduce la:

$$\frac{2n}{n+1} < \sqrt{n} < \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{2} + \frac{2n}{n+1}\right) < \frac{n+1}{2}$$

din care reținem a doua aproximație a lui $\sqrt{n}$:

$$1 < \frac{2n}{n+1} < \sqrt{n} < \frac{(n+1)^2 + 4n}{4(n+1)} < \frac{n+1}{2} \tag{6'}$$

Se vede că, atît prin exces, cît și prin lipsă aproximarea (6') este mai bună decît (6). Aceasta se exemplifică pe un caz particular, luînd $n = 2$. Vom avea, din (6), $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < 2$ și vom aproxima $\sqrt{2} \simeq \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Dacă folosim (6'), obținem:

$$1 < \frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{17}{12} = 1 + \frac{5}{12} \simeq 1{,}4166.$$

Aproximînd $\sqrt{2} \simeq 1{,}4166$ avem dintr-o dată două zecimale exacte ale lui $\sqrt{2} = 1{,}4142..$ Iterația (6') poate fi repetată luînd:

$$b_2 = \frac{(n+1)^2 + 4n}{4(n+1)}, \quad a_2 = \frac{n}{b_2}.$$

Astfel, intervalul în care se găsește $\sqrt{n}$ se va scurta din nou și vom avea o mai bună aproximație prin exces.

Desigur, metoda nu poate fi completată decît dacă se stabilește convergența aproximațiilor succesive, dar nu voim să depășim cadrul culegerii.

A.11. *1) Folosind aproximarea prin partea întreagă* $[\sqrt{n}]$ *a lui* $\sqrt{n}$, *cu* $n > 1$, *să se adapteze și să se folosească metoda lui* NEWTON *pentru aproximarea rădăcinii pătrate* $\sqrt{n}$ *a numerelor reale* $n > 0$. *(A se vedea problemele anterioare).*

2) Să se estimeze și să se compare metoda găsită cu metoda generală a lui NEWTON.

N. T./D. K. Fryer, Ontario Sec. School, Math. Bull., vol. 19, nr. 3/1983

Soluție. 1) Dacă $n > 1$, prin extragerea succesivă a primelor numere impare se ajunge la un rang m astfel încît cu $1 + 3 + 5 + \ldots + (2m-1) = m^2$ și $r < 2m+1$ se obțin relațiile:

$$m^2 \leqslant n < (m+1)^2, \quad n = m^2 + r,$$

cu $r < 2m + 1$, (1)

Acestea pot fi extinse, dacă admitem și cazul $n = (m+1)^2$, astfel:

$$m^2 \leqslant n \leqslant (m+1)^2, \quad n = m^2 + r, \tag{1'}$$

cu $0 \leqslant r \leqslant 2m+1$.

În rezolvarea unei probleme anterioare am dat și algoritmul de formare al numerelor m, m^2 și r.

Aplicînd metoda lui NEWTON din problema precedentă, este necesar să punem pe n sub forma $n = ab$ cu $a > 0$, $b > 0$. Dacă $n > 1$ și presupunem $a < b$, cel puțin $b > 1$ și $\frac{a+b}{2} > 1$.

Dacă $0 < n < 1$ vom avea $\sqrt{n} < 1$ și $[\sqrt{n}] = 0$ astfel încît $m = 0$ și algoritmul lui m nu se mai aplică. Vom putea totuși folosi atît acest algoritm, cît și metoda lui NEWTON amplificînd pe n cu o putere $2p$ a lui 10, astfel încît:

$$N = 10^{2p} n > 1, \quad n = 10^{-2p} N. \tag{2}$$

În acest caz, punînd:

$$N = ab; \quad \sqrt{N} = 10^p \sqrt{n}, \tag{2'}$$

cel puțin $b > 1$ și aproximînd pe $\sqrt{N}$ vom putea deduce și aproximația lui $\sqrt{n} = 10^{-p} \sqrt{N}$.

În cazul $n > 1$, aplicînd formulele (1), vom putea scrie:

$$m^2 \leqslant n = m^2 + r \leqslant m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2,$$

$$m \leqslant \sqrt{n} \leqslant m+1. \tag{3'}$$

Vom putea folosi inegalitatea (3') pentru a pune pe n sub forma $n = ab$ pentru aplicarea metodei lui NEWTON fiindcă putem lua $a = m$, $b = m+1$ și vom obține ca primă aproximație:

$$m < \sqrt{n} < m + \frac{1}{2} < m+1$$

numai în cazul inegalității (3') *stricte* $m < \sqrt{n} < m+1$, dubla egalitate fiind absurdă.

Trecînd la a doua aproximație vom nota, conform cu pasul al doilea al metodei lui NEWTON:

$$m + \frac{1}{2} = b_1, \quad \frac{n}{m + \frac{1}{2}} = a_1 = \frac{2n}{2m+1} \tag{4}$$

și vom avea:

$$\frac{2n}{2m+1} < \sqrt{n} < \frac{2m+1}{2}, \tag{4'}$$

cu $n = a_1 b_1$.

Dacă ne găsim în condițiile aplicării metodei lui NEWTON în intervalul $[a_1, b_1]$, pasul a doilea dă:

$$\frac{2n}{2m+1} < \sqrt{n} < \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{2m+1} + \frac{2m+1}{2}\right) < m + \frac{1}{2} < m+1. \tag{5}$$

Punînd $n = m^2 + r$, vom obține:

$$\frac{2(m^2+r)}{2m+1} < \sqrt{n} < m + \frac{4r+1}{4(2m+1)} < m + \frac{1}{2} < m+1. \tag{5'}$$

Nu am regăsit formula lui NEWTON, ci alta apropiată. Pentru a găsi chiar acea formulă este suficient să luăm de la început:

$$a = m, \quad b = \frac{n}{m}, \quad n = ab$$

şi vom avea:

$$m < \sqrt{n} < \frac{1}{2}\left(m + \frac{n}{m}\right) < m + 1. \tag{6}$$

Însă:

$$m + \frac{n}{m} = m + \frac{m^2 + r}{m} = 2m + \frac{r}{m},$$

de unde:

$$m < \sqrt{n} < m + \frac{r}{2m} < m + 1. \tag{6'}$$

Pasul următor îl obţinem luînd:

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{n}{m}\right), \quad a_1 = \frac{n}{\frac{1}{2}\left(m + \frac{n}{m}\right)} = \frac{2mn}{m^2 + n} \tag{7}$$

şi vom avea:

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2mn}{m^2 + n} + \frac{m^2 + n}{2m}\right) = \frac{4m^2n + (m^2 + n)^2}{4m(m^2 + n)}$$

sau:

$$\frac{2mn}{m^2 + n} < \sqrt{n} < \frac{4m^2n + (m^2 + n)^2}{4m(m^2 + n)} < \frac{m^2 + n}{2m}. \tag{7'}$$

În prima etapă am obţinut aproximarea (6') care este formula lui NEWTON:

$$\sqrt{n} \simeq m + \frac{r}{2m}; \tag{8}$$

în cea de-a doua:

$$\sqrt{n} \simeq \frac{4m^2n + (m^2 + n)^2}{4m(m^2 + n)}. \tag{8'}$$

2) Metoda aproximării pornind de la partea întreagă a lui $\sqrt{n}$ are avantajul teoretic de a fixa intervalul $[m, m + 1]$ cuprins între două numere naturale, consecutive, în care se găseşte $\sqrt{n}$. Ea are însă dezavantajul că implică *găsirea acestui interval*, ceea ce impune folosirea preliminară a algoritmului scăderilor succesive.

Metoda alegerii arbitrare a intervalului $[a, b]$, cu condiţia $n = ab$, elimină orice calcul preliminar, dar pare a lăsa un arbitrar supărător în intercalarea lui $\sqrt{n}$ într-un interval în care vom căuta aproximarea. S-ar putea ca această alegere arbitrară să impună mai multe iteraţii decît metoda părţii întregi a lui $\sqrt{n}$, dar tratînd aceleaşi exemple se constată că la a doua iteraţie se obţine aceeaşi aproximaţie.

Comentarii: Aproximarea cu partea întreagă a lui $\sqrt{n}$ pune în evidență și posibilitatea de a folosi simetria mediei aritmetice pentru a lua $b = m + 1$ și $a = \dfrac{n}{m+1}$ astfel ca $n = ab$. În aceste condiții, $b = m + 1$ este de la început o aproximație prin exces, dar $a = \dfrac{n}{m+1} < \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ și deci vom avea:

$$\frac{n}{m+1} < \sqrt{n} < m + 1$$

și deci:

$$\frac{n}{m+1} < \sqrt{n} < \frac{1}{2}\left(m + 1 + \frac{n}{m+1}\right) < m + 1\,, \tag{9}$$

de unde, prin analogie cu (6′):

$$\frac{n}{m+1} < \sqrt{n} < m + \frac{r+1}{2(m+1)} < m + 1\,.$$

Se poate folosi deci aproximația:

$$\sqrt{n} \simeq m + \frac{1}{2} \cdot \frac{r+1}{m+1}\,. \tag{9′}$$

Pentru a verifica rapiditatea de *convergență* a iterațiilor să aproximăm pe $\sqrt{2}$ prin ambele metode.

Prin metoda scăderilor succesive, $n = 2$, $m = 1$, aplicînd (4′) vom avea la a doua iterație:

$$\frac{2}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2},$$

iar la a treia, conform cu (5′), punînd $2 = 1^2 + 1$, deci $r = 1$, vom putea scrie:

$$\frac{4}{3} < \sqrt{2} < 1 + \frac{5}{12} < 1 + \frac{1}{2}\,.$$

Se vede că intervalul care cuprinde pe $\sqrt{n}$ s-a micșorat și vom avea $\sqrt{2} \simeq 1{,}41666$ care este o bună aproximație cu două cifre exacte, prima fiind $\sqrt{n} \simeq 1{,}5$.

Aplicînd formula lui NEWTON (6′), vom avea $\sqrt{n} \simeq 1{,}5$, ceea ce este o aproximație slabă, dar folosind (7′), (8′) vom obține din nou $\dfrac{4}{3} < \sqrt{2} < 1{,}41666\ldots$

Se vede că alegerea arbitrară a intervalului $[a, b]$, cu $n = ab$, conduce la același rezultat în cazul lui $\sqrt{2}$, dar, în schimb, este o metodă mai rapidă.

A.12. *O librărie a vîndut din exemplarele unui nou roman în prima zi de la apariție a opta parte și încă 10 exemplare, în ziua a doua jumătate din ce rămăsese în stoc și încă 15 exemplare. În acest mod mai rămî-*

neau în stoc încă 50 exemplare. Cîte exemplare se găseau în librărie înainte de începerea vînzării?

Alpha, anul 16, nr. 6/1982

Soluție. Notăm cu n numărul de exemplare de care dispunea librăria. În prima zi s-au vîndut $\frac{n}{8} + 10$ exemplare, și, deci, au mai rămas:

$$n - \left(\frac{n}{8} + 10\right) = \frac{7}{8}n - 10.$$

Vînzarea din ziua a doua a fost, deci, de:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}n - 10\right) + 15 = \frac{7}{16}n + 10.$$

Numărul total de volume va fi, prin urmare:

$$n = \left(\frac{n}{8} + 10\right) + \left(\frac{7}{16}n + 10\right) + 50,$$

de unde $n = \frac{9}{16}n + 70$, deci $n = 160$.

Comentarii: Problema este de nivelul clasei a VII-a și constituie un exemplu de modelare a unor operații comerciale simple care conduc la o ecuație liniară de gradul I. Ca structură metodologică, are defectul de a presupune de la început că soluția este un număr natural ceea ce nu rezultă din nici o condiție, ci este o potrivire concepută *a priori*. O dăm ca exemplu de modelare artificială și apriorică pentru a se evita folosirea ei care nu este suficient de instructivă și convingătoare.

A.13. *Să se determine minimul expresiei* $|1 + 9^x + 8^y - 2^z|$, *unde* x, y *și* z *sînt numere naturale.*

W. Moldenhauer, Alpha, vol. 16, nr. 6/1982

Soluție. Întrucît suma primilor termeni $1 + 9^x + 8^y$ este strict pozitivă vom avea un minim cînd ea va fi minimă, iar 2^z va fi maxim, cu condiția ca suma totală să fie nenegativă. În cazul în care ar fi negativă va trebui ca modulul său să fie minim. Ori:

$$\min |1 + 9^x + 8^y| = |1 + 1 + 1| = 3,$$

pentru $x = y = 0$. Atunci:

$$\min |1 + 9^x + 8^y - 2^z| = \min |3 - 2^z|.$$

Pentru $z = 1$, $|3 - 2^z| = 1$; pentru $z = 0$, $|3 - 2^z| = 2$; pentru $z = 2$, $|3 - 2^z| = 1$; pentru $z = 3$, $|3 - 2^z| = 5$, deci:

$$\min |1 + 9^x + 8^y - 2^z| = 1$$

și se realizează pentru $x = y = 0$, $z \in \{1, 2\}$.

Cum însă x și y au fost aleși arbitrar, se pune întrebarea dacă minimul nu ar putea fi altul. Un minim mai mic decît 0 nu ar putea fi și atunci am avea de rezolvat ecuația:

$$1 + 9^x + 8^y - 2^z = 0, \tag{1}$$

în numere naturale. Deducem uşor că :

$$2^z - 8^y = 1 + 9^x > 2, \tag{1'}$$

fiindcă $x \geqslant 0$. Prin urmare :

$$2^z - 2^{3y} = 2^{3y}(2^{z-3y} - 1) \geqslant 2.$$

Cum paranteza trebuie să fie pozitivă, adică $(2^{z-3y} - 1) > 0$, va fi necesar ca $z - 3y \geqslant 1$. Să notăm $z - 3y = \lambda$, cu $\lambda \geqslant 1$. Revenind la (1'), vom scrie :

$$1 + 9^x = 2^{3y}(2^\lambda - 1) = 8^y(2^\lambda - 1). \tag{2}$$

Dar cum $9^x = (8 + 1)^x = 8k + 1$, rezultă $1 + 9^x = 8k + 2$ şi, în ecuaţia (2), membrul întîi va deveni $8k + 2$. Dar :

$$8k + 2 = 8^y(2^\lambda - 1)$$

este o relaţie imposibilă fiindcă membrul al doilea este multiplu de 8, pe cînd primul nu are această proprietate.

În concluzie, $\min |1 + 9^x + 8^y - 2^z| = 1$, pentru x, y, z numere naturale.

Comentarii : Enunţul nu precizează că $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, deci că sînt numere naturale nenule. Soluţia dată în revistă presupune parţial această restricţie şi găseşte că $\min |1 + 9^x + 8^y - 2^z| = 2$ pe o cale asemănătoare cu a noastră. Menţionăm, totuşi, că în demonstraţie, cînd se estimează $\min(1 + 9^x)$, se presupune $x = 0$, deci restricţia la $\mathbb{N}^*$ este, în acelaşi timp, numai implicită, deşi folosită în demonstraţie, dar şi încălcată, fără efecte păgubitoare în ultima parte a soluţiei. De aceea, soluţia noastră nu elimină cazul în care x, y, z, sau unele dintre acestea, sînt nule.

A.14. *Dintr-o fîntînă arteziană, situată la 50 m deasupra nivelului solului, apa ţîşneşte cu 16 m/s vertical în sus. Să se calculeze timpul necesar unei picături de apă pentru a ajunge la sol, după ce a ieşit din tubul de aspersiune.*

G. W. Allan, A. Hill, Mathematics Second level, p. 33/1979

Soluţie. Luînd direcţia verticală ascendentă ca pozitivă, înălţimea h la care ajunge apa, după t secunde de la ieşirea din tub, va fi dată de formula mişcării uniform accelerate :

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{1}$$

unde v_0 este viteza iniţială în m/s, iar $g = 9{,}81$ m/s^2, acceleraţia gravitaţională, semnul minus fiind impus de alegerea direcţiei pozitive în sens opus atracţiei gravitaţionale.

Apa trebuie să ajungă la un nivel egal cu 50 m sub nivelul fîntînii, deci $h = -50$ m, iar viteza iniţială este $v_0 = 16$ m/s. Substituind în (1), vom obţine :

$$-50 = 16t - 4{,}9t^2;$$

$$4{,}9t^2 - 16t - 50 = 0. \tag{1'}$$

Prin rezolvarea acestei ecuaţii de gradul al doilea se găsesc două valori :

$$t_1 = 5{,}22 \text{ s}, \qquad t_2 = -1{,}96 \text{ s}.$$

Momentul iniţial fiind considerat ca $t_0 = 0$, picătura va atinge solul *după* ce a ieşit din tub, deci numai rădăcina pozitivă este posibilă şi, deci, timpul necesar va fi de 5,22 secunde.

Comentarii : Ce semnificaţie are $t_2 = -1{,}96$ s, deci un timp negativ, pentru ca picătura să fie la nivelul solului ? Aceasta ar însemna că picăturii i-ar trebui 1,96 secunde pentru a ajunge la nivelul fîntînii pornind de la sol la momentul iniţial şi a atinge aceeaşi înălţime ca şi picătura care ar fi pornit la acel moment iniţial din jetul fîntînii.

Scanned with OKEN Scanner

Cu alte cuvinte, pentru a ajunge la nivelul fîntînii la momentul inițial și a urma apoi drumul primei picături, cea de-a doua picătură ar fi trebuit să plece de la nivelul solului la momentul $-1{,}96$ s sau cu 1,96 s înaintea primei picături.

Acest exemplu, cu interpretarea pe care o dăm soluției negative, este instructiv și pune în evidență deosebirea dintre modelarea matematică a unui fenomen și tratarea în sens restrîns a soluțiilor obținute, fără o interpretare mai aprofundată.

A.15. *Cît timp îi trebuie unei mingi proiectată vertical în sus pentru a ajunge în dreptul unei ferestre la 17,5 m înălțime, mingea plecînd de la nivelul solului cu o viteză inițială de 28 m/s?*

Math. Sec. level, p. 37/1979

Soluție. Prin mișcarea rectilinie uniform accelerată sub acțiunea gravității, legea de mișcare pe verticală orientată pozitiv ascendent va fi :

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{1}$$

semnul minus fiind impus de atracția gravitațională orientată spre centrul Pămîntului. Am notat cu h înălțimea atinsă la momentul t, cu v_0 viteza inițială și cu $g = 9{,}81$ m/s^2, accelerația gravitațională. Vom avea în problemă $v_0 = 28$ m/s și $h = 17{,}5$ m, de unde, introducînd în (1), vom obține :

$$17{,}5 = 28t - 4{,}9t^2$$

care, după împărțire cu 0,7, devine :

$$7t^2 - 40t + 25 = 0. \tag{1'}$$

Rădăcinile vor fi $t_1 = \frac{5}{7}$ s și $t_2 = 5$ s, ambele pozitive, deci valabile cu interpretarea următoare : mingea ajunge în dreptul ferestrei după $\frac{5}{7}$ secunde, dar ea continuă să se înalțe pînă la un maximum, după care cade spre sol și trece din nou prin fața ferestrei după 5 secunde de la lansare.

Comentarii : Problema este un model de mișcare uniform accelerată în care două soluții matematice se cer interpretate fizic, ceea ce am făcut.

Rămîne o întrebare : *unde și cînd se oprește mingea în mișcarea ei ascensională*? La aceasta se poate răspunde după cum urmează : vom căuta să găsim valoarea sau valorile lui t pentru care h este maxim, dacă există. În acest scop, vom observa că h se anulează de două ori în expresia (1) :

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = t\left(v_0 - \frac{1}{2} g t\right) = 0$$

pentru $t = 0$ și $t = \frac{2v_0}{g}$ deci, pentru $0 < t < \frac{2v_0}{g}$, vom avea $h > 0$. Pe de altă parte, dacă am putea pune pe h sub forma unei diferențe $h = A - B(t)$, unde $A > 0$ și $B(t) \geqslant 0$, am avea $\max h = A$, cînd $B(t) = 0$. Ori :

$$h = -\frac{1}{2} g \left(t^2 - \frac{2v_0}{g} t\right) = -\frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g},$$

deci :

$$A = \frac{v_0^2}{2g} > 0, \quad B(t) = \frac{1}{2} g \left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom avea :

$$\max h = \frac{v_0^2}{2g}$$

pentru $t = \frac{v_0}{g}$.

Prin urmare, mingea se înalță pînă la cota :

$$h_{max} = \frac{28^2}{2 \cdot 9{,}81}\,\text{m} \approx \frac{28^2}{19{,}6}\,\text{m} = \frac{28^2}{2 \cdot 7 \cdot 1{,}4}\,\text{m} = \frac{28^2}{7 \cdot 2{,}8}\,\text{m} = \frac{10 \cdot 28}{7}\,\text{m} = 40\,\text{m},$$

care va fi atinsă la momentul :

$$t = \frac{28}{9{,}81}\,\text{s} \approx \frac{28}{1{,}4 \cdot 7}\,\text{s} = \frac{10 \cdot 2}{7}\,\text{s} = \frac{20}{7}\,\text{s} \approx 2{,}86\,\text{s}.$$

Astfel, după 2,14 secunde de la atingerea maximului de 40 m, mingea trece din nou prin fața ferestrei.

Această completare a problemei are ca scop să atragă atenția că, atunci cînd o problemă modelează matematic un fenomen, rezolvarea nu se termină cînd s-au găsit soluțiile, ci se continuă cu interpretări, discuții și comentarii.

A.16. *Lungimea unui cablu, care atîrnă între doi suporți de aceeași înălțime și separați prin distanța* d *și care ajunge în punctul său cel mai de jos la o distanță* s *de la nivelul superior al suporților, este dată aproximativ printr-o formulă de forma :*

$$\text{L} = \frac{8\,\text{s}^2}{3\,\text{d}} + \text{d}.$$

Un cablu de lungime L = *50 m atinge în punctul său cel mai de jos solul dacă este suspendat între doi suporți avînd înălțimea de 2,30 m deasupra solului. Să se calculeze distanța dintre cei doi suporți.*

Math. Sec. level, p. 38/1979

Soluție. Distanța s de la nivelul superior al suporților pînă la punctul cel mai de jos al cablului este, în cazul problemei, înălțimea $s = 2{,}30$ m a acestora.

Introducînd în formulă și aranjînd termenii obținem, pentru a determina distanța d, ecuația :

$$3d^2 - 150\,d + 42{,}32 = 0$$

cu rădăcinile $d_1 = 49{,}72$ și $d_2 = 0{,}28$.

Cum distanța dintre suporți este, prin datele problemei și prin formula lui L, apropiată de L, nu putem reține decît $d_1 = 49{,}72$ m, cealaltă rădăcină fiind inacceptabilă.

Comentarii : Problema modelează matematic relația dintre lungimea L a unui cablu suspendat, distanța dintre cei doi suporți și săgeata s a cablului suspendat. Eliminarea soluției d_2 s-a făcut pe baza unor considerații intuitive, dar poate fi justificată matematic ingenios. Într-adevăr, avem că $L \geq d$ și, în același timp, $L \leq d + 2s$. Prin urmare :

$$d \leq \frac{8s^2}{3d} + d \leq d + 2s,$$

de unde :

$$\frac{8s^2}{3d} \leqslant 2s\,;\ d \geqslant \frac{4}{3}\,s.$$

Ori, pentru $d_2 = 0{,}28$ și $s = 2{,}30$, condiția $d \geqslant \frac{4}{3}\,s$ nu este îndeplinită, ceea ce justifică eliminarea soluției $d_2 = 0{,}28$ m.

Această problemă, ca și celelalte asemănătoare, luate din *Math. Sec. level*, nu prezintă dificultăți de modelare fiind, de fapt, aplicații ale unor formule și rezolvări de ecuații de gradul al II-lea. Ceea ce le recomandă că instructive este discuția soluțiilor care se poate face cu mijloace elementare, dar care nu sînt banale.

A.17. *Mulțimea* T *de numere raționale are următoarele proprietăți :*

1). *Dacă* $\frac{p}{q} \in T$ *atunci* $\frac{p}{p+q}$ *și* $\frac{q}{p+q} \in T$;

2). $1/2 \in T$.

Să se demonstreze că T *conține toate numerele raționale cuprinse între 0 și 1.*

Parabola, vol. 18, nr. 2/1982

Soluție. Deoarece $\frac{1}{2} \in T$ atunci, în baza proprietăților 1), vom avea și $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \in T$ ca și $\frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \in T$. În mod analog :

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1+3} \in T\,;\ \frac{3}{4} = \frac{3}{1+3} \in T,$$

apoi :

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{1+4} \in T\,;\ \frac{2}{5} = \frac{2}{2+3} \in T\,;\ \frac{4}{5} = \frac{4}{1+4} \in T$$

etc.

Vom aplica un raționament prin inducție asupra lui $p + q$, numărul rațional considerat urmînd să fie $\frac{p}{q}$. Observăm că, pe baza cazurilor particulare considerate, rezultatul este adevărat dacă $p + q \in \{3, 4, 5\}$.

Fie $0 \leqslant \frac{p}{q} \leqslant 1$ un număr rațional, cuprins între 0 și 1. Este inutil să luăm $p < 0$ și $q < 0$, fiindcă nu obținem nimic nou, în afară de reprezentarea acestor numere întregi pe semidreapta numerică negativă.

Să observăm că, pornind de la $\frac{1}{2}$, am reușit să arătăm că toate fracțiile subunitare cu numitorii 2, 3, 4, 5 aparțin lui T. În treacăt, adăugăm că $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ și că, din $\frac{2}{3}$ obținem $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5} \in T$. La fel, pentru numitorul 6.

Pentru a arăta că orice număr raţional de forma $\frac{p}{q} < 1$, cu $(p, q) = 1$, deci fracţie ireductibilă, aparţine lui T, vom aplica un raţionament prin inducţie. Pentru fracţiile reductibile le vom reduce la altele ireductibile, cu numitorii mai mici.

Pentru numărul $\frac{p}{q}$, cu $p < q$, vom folosi numărul $\frac{p}{q-p}$ dacă $\frac{p}{q-p} < 1$, deci dacă $2p < q$. Dacă $\frac{p}{q-p} > 1$, vom lua în consideraţie $\frac{q-p}{p} < 1$, unde $q < 2p$.

Cum $p + (q-p) = q < p + q$, vom putea aplica proprietatea 1) celor două numere raţionale subunitare considerate.

Dacă pentru numitorul $q - p$ are loc $\frac{p}{q-p} \in T$, atunci şi $\frac{p}{(q-p)+p} = \frac{p}{q} \in T$.

Ori, cum $q - p < q$ şi $p < q$, în ipoteza că, pentru numitorii respectivi $q - p$ şi p, am demonstrat apartenenţa tuturor numerelor de forma :

$$\frac{1}{q-p}, \frac{2}{q-p}, \ldots, \frac{p}{q-p}$$

unde $2p < q$, ca şi a numerelor de forma :

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{q-p}{p}$$

unde $q < 2p$, la T, numărul $\frac{p}{q}$ va aparţine lui T în baza proprietăţii (1) folosită, respectiv, în cele două ipoteze.

Dar apartenenţa la T a fost dovedită pentru numitorii 2, 3 (şi chiar 4 dacă dorim). Aceasta înseamnă că proprietatea este generală pentru orice $p + q \geqslant 3, 4, 5$.

Comentarii : Raţionamentele aplicate în rezolvarea problemei sînt bazate pe inducţie, dar într-o formă mai puţin obişnuită a cărei bază este formarea însăşi succesivă a numerelor raţionale cu un numitor dat q şi demonstraţia că toate acestea, începînd cu $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}$ etc., aparţin lui T.

Motivul principal este posibilitatea de a întrebuinţa numerele raţionale cu numitori mai mici decît q, respectiv $q - p$ sau p, cărora li se poate aplica proprietatea 1) şi pentru care aceasta se presupune verificată. Cum verificarea pentru primii numitori 2, 3 este realizată direct, ca va rezulta şi pentru 4, apoi pentru 5 etc.

Schiţa de soluţie dată în revistă este prea sumară şi neglijează tocmai aceste aspecte fundamentale, mărginindu-se la a spune :

Dacă $\frac{p}{q-p} < 1$, atunci $\frac{p}{(q-p)+p} = \frac{p}{q} \in T$; dacă $\frac{q-p}{p} < 1$, atunci :

$$\frac{p}{(q-p)+p} \in T.$$

De ce? Nu se spune nimic, iar faptul că ambele fracţii sînt subunitare este insuficient.

A.18. *Funcția* f *aplică intervalul* $I = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *în el însuși, adică* f(x) *este definită pentru* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *și* $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *pentru orice* $x \in I$.

În plus, f(x) *satisface ecuația funcțională :*

$$f(x) + f(y) = f(f(x) + y), \tag{1}$$

pentru orice x, y *pentru care ambii membri ai ecuației sînt definiți.*

Să se arate că :

$$f(f(x)) = f(x), \tag{2}$$

pentru orice $x \in I$.

Parabola, vol. 18, nr. 2/1982

Soluție. Condiția ca ambii membri ai ecuației (1) să fie definiți, impune ca $f(x) + y \in I$. Cum $f(x) \in I$, $f(x) + 0 = f(x) \in I$ și vom avea, pentru $y = 0$:

$$f(x) + f(0) = f(f(x) + 0) = f(f(x)).$$

Astfel, va fi suficient să dovedim că $f(0) = 0$, pentru a obține relația (2). Făcînd $x = 0$ și observînd că $f(0) \in I$, vom avea și $f(f(0)) \in I$ și putem scrie :

$$f(0) + f(0) = f(f(0)) \leqslant 1, \tag{3}$$

de unde $f(0) \leqslant \frac{1}{2}$.

Să notăm :

$$f_1(0) = f(0); \quad f_{n+1}(0) = f(f_n(0)). \tag{3'}$$

Vom avea, ținînd seama de (3) :

$$f_2(0) = f(f_1(0)) = f(f(0)) = f(0) + f(0) = 2f(0) \leqslant 1;$$

$$f_3(0) = f(f_2(0)) = f(f_2(0) + 0) = f(f(0) + f(0)) = f(0) + f_2(0),$$

aplicînd (1), pentru $x = 0$ și $y = f(0)$.

Vom folosi un raționament prin inducție. Să presupunem că :

$$f_n(0) = f(f_{n-1}(0)) = f(f_{n-1}(0) + 0) = f_{n-1}(0) + f(0). \tag{4}$$

Atunci :

$$f_{n+1}(0) = f(f_n(0)) = f(f_{n+1}(0) + f(0)) = f(f_{n-1}(0)) + f(0) = f_n(0) + f(0) \tag{4'}$$

aplicînd (4') și (1) pentru $x = 0$, $y = f_{n-1}(0)$. Urmează că (4') este adevărată pentru orice n, deoarece este valabilă pentru $n = 2$.

Din (4') deducem ușor, înlocuind pe n, pe rînd, cu $n-1$, $n-2$, ..., 1 și, adunînd membru cu membru :

$$f_{n+1}(0) = (n + 1) f(0).$$

Cum $f_n(0) \in I$ pentru orice n, după cum rezultă din (3'), vom avea $f_{n+1}(0) \leqslant 1$ și deci $f(0) \leqslant \frac{1}{n+1}$ pentru $n = 1, 2, 3 \ldots$. Ori, $f(0)$ este un număr pozitiv și, cum pentru $\varepsilon > 0$ dat putem face ca $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, dacă $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, vom avea și $f(0) < \varepsilon$, Cum singurul număr pozitiv mai mic decît orice $\varepsilon > 0$ dat arbitrar este 0, vom trage concluzia că $f(0) = 0$ și relația (2) va fi verificată.

Scanned with OKEN Scanner

Comentarii: Raţionamentul urmat face apel la noţiunea de *limită* dar această incursiune se face fără eforturi suplimentare, referindu-se la imposibilitatea ca un număr pozitiv dat să fie mai mic decît orice alt număr pozitiv $\varepsilon > 0$, oricît de mic ar fi ales acesta. Suportul acestui raţionament este faptul că $f_{n+1}(0)$ este mai mic sau egal cu 1 şi egal, în acelaşi timp, cu $(n+1)f(0)$.

A.19. *Dacă* a, b, c *sînt numere reale pozitive, atunci*:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

În ce caz avem egalitate?

E. Cesaro, Nouvelle correspondence, Math. 6 (1880), p. 140

Soluţie. Pornind de la inegalităţile evidente:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0,\quad (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 \geqslant 0,\quad (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 \geqslant 0,$$

deducem:

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},\quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc},\quad c+a \geqslant 2\sqrt{ca}.$$

Înmulţind aceste inegalităţi, obţinem:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c$.

A.20. *Dacă* a, b, c *şi* A, B, C *sînt numere reale, astfel încît*:

$$aC - 2bB + cA = 0;\quad ac - b^2 > 0,$$

atunci:

$$AC - B^2 \leqslant 0.$$

Olimpiada de matematică, Ungaria, 1911

Soluţie. Trebuie demonstrat că egalitatea:

$$aC + cA = 2bB \tag{1}$$

şi inegalităţile:

$$ac > b^2,\quad AC > B^2 \tag{2}$$

nu pot fi simultan îndeplinite. Din (2) deducem că:

$$acAC > b^2B^2.$$

De aici, ţinînd cont de relaţia (1), rezultă:

$$4acAC > (aC+cA)^2,$$

ceea ce poate fi scris astfel:

$$0 > (aC-cA)^2.$$

Dar aceasta este imposibil, deoarece pătratul unui număr real nu poate fi negativ.

A.21. *Să se determine toate valorile lui* x *pentru care*:

$$\frac{x}{x^2-5x+7}$$

este număr întreg.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Fie $\frac{x}{x^2-5x+7}=k$, $k\in\mathbb{Z}$, de unde $kx^2-(5k+1)x+7k=0$.

Pentru $k=0$ rezultă $x=0$.

Pentru $k\neq 0$ rezultă $\Delta=-3k^2+10k+1$, de unde $3k^2-10k-1\leqslant 0$, deci $\frac{5-\sqrt{28}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{5+\sqrt{28}}{3}$. Dar, ținînd cont că $\left[\frac{5-\sqrt{28}}{3}\right]=-1$, $\left[\frac{5+\sqrt{28}}{3}\right]=3$ (prin $[a]$ am notat partea întreagă a numărului real a), deducem $k\in\{0,1,2,3\}$ și, rezolvînd, succesiv, ecuațiile obținute, rezultă că $x\in\left\{0,2,\frac{7}{3},3,\frac{7}{2},3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}\right\}$.

A.22. *Fie trinomul de gradul al doilea* $f(x)=ax^2+bx+c$, *astfel ca ecuația* $f(x)=x$ *să nu aibă rădăcini reale.*

Să se demonstreze că nici ecuația $f[f(x)]=x$ *nu are, în acest caz, rădăcini reale.*

Olimpiada de matematică, U.R.S.S.

Soluție. Deoarece ecuația $f(x)=x$ nu are rădăcini reale, înseamnă că trinomul de gradul al doilea $ax^2+(b-1)x+c$ nu se anulează în nici un punct și are același semn pentru orice valoare a lui x. Astfel, distingem două cazuri:

i) $ax^2+(b-1)x+c>0$, adică $f(x)>x$.

Fie $x=x_0$ și astfel avem $f[f(x_0)]>f(x_0)$ și $f(x_0)>x_0$, deci $f[f(x_0)]>x_0$ și ecuația $f[f(x)]=x$ nu are rădăcini reale;

ii) $ax^2+(b-1)x+c<0$, adică $f(x)<x$.

Fie $x=x_0$ și astfel avem $f[f(x_0)]<f(x_0)$ și $f(x_0)<x_0$, deci $f[f(x_0)]<x_0$ și ecuația $f[f(x)]=x$ nu are rădăcini reale.

A.23. *Perioada unui pendul compus este dată de formula* $T=2\pi\sqrt{\frac{k^2+h^2}{gh}}$, *unde* T *este perioada de girație în secunde,* k *este raza de girație în metri și* h *este distanța în metri de la pivotul de girație la centrul de greutate al pendulului.*

Un astfel de pendul poate fi făcut dintr-o bară de bronz, cum ar fi un metru etalon. Dacă bara are lungimea de un metru, atunci $k^2=\frac{1}{12}\ m^2$, *cu foarte bună aproximație. Să se determine poziția pivotului pe o astfel de bară, astfel încît perioada să fie de 1,6 secunde* ($g=9{,}81\ m/s^2$).

Soluție. Nu avem decît să aplicăm formula pendulului compus, care este ea însăși aproximativă, luînd $T=1{,}6$ s, $k^2=\frac{1}{12}\ m^2$. Vom obține ecuația:

$$h^2-\frac{gT^2}{4\pi^2}h+k^2=0 \qquad (1)$$

ale cărei rădăcini sînt, cu aproximație mai mică de un milimetru:

$$h_1=0{,}451\ \text{m};\quad h_2=0{,}185\ \text{m}$$

ca distanțe de la centrul de greutate.

Comentarii: Cele două rădăcini găsite sînt valabile amîndouă, dar trebuie plasate de ambele părți ale centrului de greutate și anume $h_1=0{,}451$ m deasupra, iar $h_2=0{,}185$ m dedesubt. Astfel, oscilațiile nu ar putea avea ambele aceeași perioadă de 1,6 secunde.

Scanned with OKEN Scanner

A.24. *Se dă funcția* f *definită pe* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *și satisfăcînd următoarele condiții:*

a) $f(0, y) = y + 1$;

b) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$;

c) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$,

pentru orice x, y *nenegativi.*

Să se determine expresia lui $f(4, 1981)$.

Parabola, vol. 18, nr. 2/1982

Soluție. Rezolvarea comportă mai multe etape. În prima vom arăta că:

$$f(1, y) = y + 2, \ (\forall)\ y \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Într-adevăr, $f(1, 0) = f(0 + 1, 0) = f(0, 1)$, în baza condiției b). Luînd $y = 1$ avem $f(0, 1) = 1 + 1$ în baza lui a), deci:

$$f(0, 1) = f(1, 0) = 0 + 2$$

după cum ar trebui să rezulte din (1), care este, astfel, verificată pentru $y = 0$. Dacă luăm $x=0$ în c), obținem:

$$f(1, y + 1) = f(0, f(1, y)) = f(1, y) + 1, \tag{2}$$

dacă aplicăm a). Dacă pentru $y_0 \in \mathbb{N}$ am avea $f(1, y_0) = y_0 + 2$, am introduce în 2) și am obține:

$$f(1, y_0 + 1) = f(1, y_0) + 1 = (y_0 + 1) + 2. \tag{2'}$$

Aceasta arată că (1) este valabilă atunci și pentru $y_0 + 1$. Cum y este un întreg nenegativ, printr-un raționament prin inducție deducem că (2') este valabilă pentru orice $y \in \mathbb{N}$, adică (1) este stabilită.

Pasul al doilea cere stabilirea relației:

$$f(2, y) = 3 + 2y. \tag{3}$$

În acest scop, observăm că avem pentru $y = 0$:

$$f(2, 0) = f(1 + 1, 0) = f(1, 1),$$

în baza lui b), iar în baza lui (1):

$$f(2, 0) = f(1, 1) = 1 + 2 = 3.$$

Putem, deci, scrie $f(2, 0) = 3 + 2\times 0$, în conformitate cu (3).
Dacă luăm $x = 1$ în c), vom putea scrie:

$$f(2, y + 1) = f(1, f(2, y)) = f(2, y) + 2,$$

ținînd seama de (1). Dar $f(2, y) = 3 + 2y$, din (3), deci:

$$f(2, y + 1) = (3 + 2y) + 2 = 3 + 2(y + 1).$$

În consecință, (3) este valabilă pentru $y + 1$, dacă a fost valabilă pentru y. Cum s-a verificat pentru $y = 0$, relația (3) este generală prin inducție.

Pasul al treilea ne conduce la a arăta că:

$$f(3, y) = 2^{y+3} - 3. \tag{4}$$

Nu vom mai folosi inducția ca pentru (1) și (3), ci vom proceda prin ghicire și apoi vom aplica inducția. Folosind (b) pentru $x = 2$, vom avea:

$$f(3, 0) = f(2, 1) = 3 + 2, \tag{4'}$$

dacă ținem seama și de (3).

Scanned with OKEN Scanner

Folosind, apoi, c) pentru $x = 2$ și $y = 0$ obținem, succesiv:

$$f(3, 1) = f(2, f(3, 0)) = 3 + 2f(3, 0) = 3 + 2(3 + 2) = 3(1 + 2^1) + 2^2, \tag{5}$$

ținînd seama de (3) și de (4′) și punînd rezultatul sub o formă pe care dorim s-o extindem. De aceea, repetînd considerațiile din (5), pentru $f(3, 2)$, vom avea:

$$f(3, 2) = f(2, f(3, 1)) = 3 + 2[3(1 + 2^1) + 2^2] = 3(1 + 2 + 2^2) + 2^3.$$

Dacă am repeta acest procedeu, avem presupunerea că am obține:

$$f(3, y) = 3(1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^y) + 2^{y+1} = 3\,\frac{2^{y+1} - 1}{2 - 1} + 2^{y+1} = 4 \cdot 2^{y+1} - 3 = 2^{y+3} - 3. \tag{5′}$$

Presupunînd adevărată formula (5′) și luînd $y \to y + 1$, aceasta ar deveni imediat de aceeași formă:

$$f(3, y + 1) = 2^{y+4} - 3.$$

Cum pentru $f(3, 2)$ ea a fost stabilită, va fi valabilă pentru orice $y \in \mathbb{N}$.

Pasul următor cere să evaluăm $f(4, y)$. Vom proceda ca pentru $f(3, y)$. Pornim de la:

$$f(4, 0) = f(3, 1) = 2^{1+3} - 3 = 2^4 - 3 = 2^{2^2} - 3,$$

folosind (4) pentru $y = 1$. Trecînd la $f(4, y)$, vom face presupunerea că:

$$f(4, y) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} - 3, \tag{6}$$

unde la exponent avem $y + 2$ cifre de 2 în ascensiune, și vom evalua:

$$f(4, y + 1) = f(3, f(4, y)) = 2^{f(4, y)+3} - 3,$$

prin aplicarea lui c) și (5′). Apoi, ținînd seama de (6) la exponent:

$$f(4, y + 1) = 2^{(2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3) + 3} - 3 = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} - 3, \tag{6′}$$

unde la exponent avem 2 în ascensiune de $y + 3$ ori.

Dacă formula (6) este valabilă, aceeași proprietate o va avea și (6′), deci (6) va fi valabilă dacă este verificată pentru $y = 0$. Ori, $f(4, 0)$ este verificată, deci (6) este valabilă pentru orice y.

Pentru a răspunde la cerința problemei este suficient să luăm $y = 1\,981$, în care caz:

$$f(4, 1\,981) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}} - 3,$$

unde la exponent sînt 1 984 cifre de 2 ascensionați.

Comentarii: Numărul astfel obținut este uriaș, chiar și pentru distanțele și timpurile astronomice din cosmologia cunoscută.

Problema este deosebit de instructivă ca metodologie, fiind, de fapt, axată pe determinarea funcției f pe domeniul ei de definiție $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cum acesta este discret, valorile variabilelor fiind numere naturale, construcția funcției poate fi făcută pas cu pas, folosind cele trei condiții de bază.

Problema nu insistă asupra construcției în ambele variabile, mulțumindu-se să obțină formula (6) în care $x = 4$ și y arbitrar în $\mathbb{N}$. Ar fi interesant de continuat algoritmul de formare, cu încercarea de ghicire a formei generale, care s-a conturat numai prin (5′) pentru $x = 3$, precizîndu-se prin $f(4, y)$, unde forma a fost extrapolată prin ghicire și apoi dovedită prin inducție.

Este surprinzător ordinul uriaș de mărime în variabila y, chiar și pentru $x = 4$.

Scanned with OKEN Scanner

A.25. *Numărul de reprezentări posibile ale unui număr natural* n *ca sumă de numere naturale consecutive este* $\varphi(n^*) - 1$, *unde* n^* *este cel mai mare divizor impar al lui* n, *iar* $\varphi(n^*)$ *este indicatorul lui Euler al lui* n^*.

Robert W. Prielipp și Norbert I. Kuenzi,
The mathematics teacher, vol. 68, nr. 1, 1975

Soluție. Orice număr natural n poate fi sub pus forma unui produs de factori primi la puteri convenabile, în mod unic.

Dacă $n = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^s \ldots$, vom putea nota:

$$n^* = 3^q \cdot 5^s \cdot 7^t \ldots, \tag{1}$$

și deci $n = 2^p \cdot n^*$, unde $p, q, r, s, \ldots$ pot fi numere naturale oarecare, deci și 0.

Observăm că n^* este cel mai mare divizor impar al lui n și că $(n^*, 2^p) = 1$, deci că cei doi factori sînt relativ primi.

Dacă $n^* = 1$, $n = 2^p$, atunci $\varphi(n^*) - 1 = \varphi(1) - 1 = 1 - 1 = 0$, deci dacă $n = 2^p$, atunci n nu admite nici o reprezentare ca sumă de numere naturale consecutive. Prin urmare, rezultatul urmărit este valabil cînd $n \neq 2^p$.

Să trecem acum la cazul $n^* > 1$, deci cînd n^* se poate scrie ca produs de factori impari, conform cu (1). Fie $j = 2r + 1$ unul dintre divizorii lui n^*. Putem scrie atunci $n = jw$, unde w este un număr natural par sau impar, iar $j > 1$, deci $r \geqslant 1$.

Vom distinge două cazuri, și anume $1 \leqslant w \leqslant r$ sau $w > r$. Vom avea, respectiv:

$$n = (r - w + 1) + \ldots + r + \ldots + (r + w), \tag{2}$$

cînd $1 \leqslant w \leqslant r$, sau:

$$n = (w - r) + \ldots + w + \ldots + (w + r), \tag{2'}$$

cînd $w > r$.

În primul caz, n este suma a $2w$ numere naturale consecutive, iar în al doilea, suma a $2r + 1$ numere naturale consecutive. Punînd, în primul caz:

$$2w = k + 1;\ r - w + 1 = m, \tag{3}$$

descompunerea (2) se va putea scrie:

$$n = m + (m + 1) + \ldots + (m + 2w - 1) = m + (m + 1) + \ldots + (m + k). \tag{3'}$$

În al doilea caz, vom putea nota:

$$2r = k,\ 2r + 1 = k + 1;\ w - r = m \tag{4}$$

și atunci descompunerea (2') se va putea scrie:

$$n = m + (m + 1) + \ldots + (m + 2r) = m + (m + 1) + \ldots + (m + k). \tag{4'}$$

Însumînd, în cazul (3'), obținem:

$$n = m(k + 1) + \frac{k(k + 1)}{2} = \frac{k + 1}{2}(2m + k) = w(2m + k),$$

și cum $2m + k = 2m + 2w - 1 = 2(m + w) - 1$ este un număr impar, divizorului impar $2m + k$ al lui n i-am putut asocia descompunerea (3) cu k termeni.

Însumînd în cazul (4'), vom avea pentru n expresia:

$$n = m(k + 1) + \frac{k(k + 1)}{2} = (k + 1)\left[m + \frac{k}{2}\right] = (2r + 1)\,w,$$

deci divizorului impar $2r + 1$ al lui m i-am putut, de asemenea, asocia descompunerea (3') cu k termeni.

Scanned with OKEN Scanner

Astfel, dacă n poate fi pus sub forma unei sume de numere naturale consecutive, există totdeauna două numere naturale m și k astfel încît descompunerea lui n să înceapă cu m și să aibă $k+1$ termeni, ca în (3') și (4').

În aceste condiții, vom avea atîtea descompuneri posibile cîți divizori impari are n sau, mai exact, cîți divizori naturali are n^*, ceea ce ne conduce la indicatorul $\varphi(n^*)-1$, unde $\varphi(n^*)$ este indicatorul lui EULER al lui n^*.

Comentarii: Problema descompunerii unui număr natural în sumă de numere naturale consecutive prezintă trei aspecte importante: existența descompunerii, numărul de termeni ai sumelor și, apoi, unicitatea descompunerilor.

S-a arătat că, excluzînd puterile lui 2, celelalte numere naturale admit astfel de descompuneri. Demonstrația a folosit unele artificii bazate pe scrierea aceluiași număr impar $2m+1$ sub diverse forme corespunzînd factorului w, adică transformarea lui $w(2m+1)$ în w termeni egali cu $2m+1$.

Dar, în acest mod, nu am pus și nu am abordat întrebarea dacă o astfel de descompunere este unică.

Problema de față arată că nu se stabilește chiar și numărul descompunerilor posibile, care corespunde tuturor divizorilor impari ai lui n, dat de $\varphi(n^*)-1$.

A.26. *Să se determine cel mai mic număr de forma* $|11^k - 5^l|$, *unde* $k, l \in \mathbb{N}$.

Olimpiada de matematică URSS

Soluție. Se observă că, pentru $k=2$ și $l=3$, avem $|11^k - 5^l| = 4$. Pe de altă parte, $|11^k - 5^l|$ se poate termina în 6 sau 4, după cum $11^k > 5^l$ sau $5^k > 11^l$. Prin urmare, minimul căutat este 4.

A.27. *Să se demonstreze că diferența* $a^3 - b^3$, *formată din cuburile numerelor întregi impare* a *și* b, *se divide cu* 2^n *dacă și numai dacă* $(a-b)$ *se divide cu* 2^n.

Olimpiada de matematică, Ungaria

Soluție. a). Evident, $a^3 - b^3$ este egal cu produsul dintre numerele:

$$A = a^2 + ab + b^2;\ B = a - b.$$

Dacă B se divide cu 2^n, atunci și produsul AB se divide cu acesta.

b). Deoarece a și b sînt numere impare, $A = a^2 + ab + b^2$ este număr impar; deci A și 2^n sînt numere prime între ele. Dar, în acest caz, AB poate fi divizibil cu 2^n numai dacă B se divide cu el.

A.28. *Să se arate că ecuația:*

$$a^2 + b^2 - 8c = 6$$

nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Olimpiada de matematică, Canada

Soluție. Distingem două cazuri:

I) a impar, b impar;

II) a par, b par.

I) Fie $a = 2l+1$, $b = 2k+1$, unde $l, k \in \mathbb{Z}$ și, astfel, ecuația din enunț se transcrie:

$$4l^2 + 4l + 1 + 4k^2 + 4k + 1 = 8c + 6$$

sau:

$$l(l+1) + k(k+1) = 2c + 1$$

imposibil, deoarece membrul drept este un număr impar, iar membrul stîng este un număr par, ca sumă de două numere pare.

Scanned with OKEN Scanner

II) Fie $a = 2l$, $b = 2s$, cu $l, s \in \mathbb{Z}$, şi, astfel, ecuaţia din enunţ se transcrie:

$$4l^2 + 4s^2 = 8c + 6,$$

sau:

$$2(l^2 + s^2) = 4c + 3,$$

imposibil, deoarece membrul drept este un număr impar, iar membrul sting este un număr par.

A.29. *Arătaţi că orice număr natural se poate reprezenta într-o infinitate de moduri ca suma cuburilor a trei numere raţionale.*

Kvant, 1979

Soluţie. Pornind de la identitatea:

$$a = \left(\frac{a^3 - 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3 + \left(\frac{-a^3 + 3^5a + 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3 + \left(\frac{a^2 + 3^4a}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6}\right)^3$$

şi ţinînd cont că:

$$\frac{a^3 - 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{-a^3 + 3^5a + 3^6}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{a^2 + 3^4a}{3^2a^2 + 3^4a + 3^6} \in \mathbb{Q},$$

pentru $a \in \mathbb{N}$, rezultă că afirmaţia enunţului este imediată.

Capitolul II

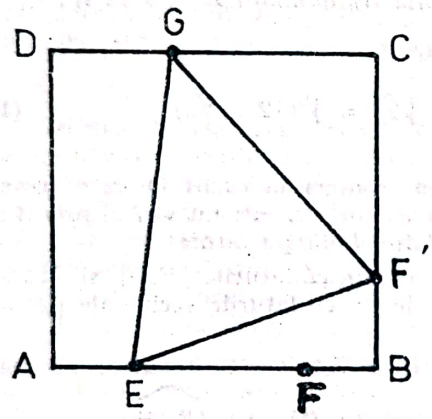
Geometrie

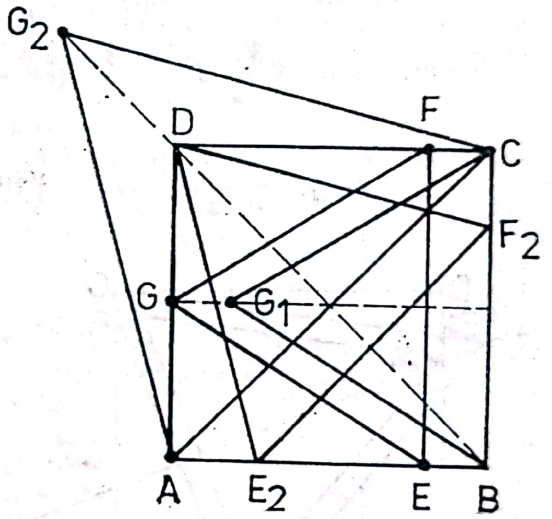
G.1. *1) Fiind dat pătratul* ABCD *cu latura de lungime* 1, *să se înscrie în acesta un triunghi echilateral* EFG *de arie maximă sau de arie minimă.*
2) Să se calculeze aceste arii.

Olimpiada națională chineză, 1978, The mathematics teacher, vol. 74, nr. 6/1981.

Solutie: 1) Un triunghi echilateral poate fi inscris în mai multe moduri într-un pătrat: poate avea toate cele 3 vîrfuri pe trei laturi ale pătratului, poate avea un vîrf într-unul din vîrfurile pătratului sau două vîrfuri în două vîrfuri ale pătratului, acestea putînd fi alăturate sau opuse.

Trebuie examinate separat toate aceste cazuri.





În prealabil vom stabili lema următoare:

Dacă cele trei vîrfuri E, F, G *trebuie să fie pe laturile sau în vîrfurile pătratului* ABCD *cu latura de lungime 1, lungimea uneia din laturile lui* EFG *nu poate fi mai mică decît 1.*

Într-adevăr, să presupunem că $EF < 1$. Dacă E este pe $[AB]$, F va putea fi sau pe $[AB]$, sau pe $[BC]$ sau pe $[AD]$. Dacă F este pe $[AB]$, G va trebui să fie pe $[CD]$ fiindcă dacă ar fi pe $[BC]$, unghiul $\widehat{FEG}$ ar fi obtuz și deci triunghiul EFG n-ar putea fi echilateral, iar dacă ar fi pe $[AD]$, unghiul $\widehat{FEG}$ ar fi obtuz și am avea aceeași imposibilitate. Dacă G ar fi pe $[CD]$, lungimea laturii $[EG]$ ar fi mai mare sau egală cu lungimea lui $[AD]$, deci nu ar putea fi mai mică decît 1, imposibil căci $EF \leqslant AB = AD$.

Aceeași imposibilitate se obține dacă F' este, ca în figura (a), pe $[BC]$. Vîrful G nu poate fi pe $[BC]$, fiindcă ne-am găsi în situația precedentă. Dar dacă G este pe $[CD]$, vom avea $EG \geqslant 1$ și contrazice ipoteza laturilor mai mici decît 1 ($EF' < 1$); la fel, dacă G ar fi pe AD, atunci $F'G \geqslant 1$.

Cazul în care E ar fi în vîrful A, de exemplu, ar impune ca F' să fie pe $[BC]$ și atunci $EF' = AF' > 1$, deci contradicție.

O dată stabilită lema ajutătoare vom examina, pe rînd, toate cazurile începînd cu ultimul. Fie E și F situate, respectiv în B și în C. În aceste condiții latura triunghiului echilateral va avea lungimea 1. Vîrful G va fi în G_1 în interiorul pătratului fiindcă $BG_1 = 1$ impune ca G_1

să fie la intersecția cercurilor cu centrele în B și C și cu raza de lungime 1.

Putem însă translata triunghiul BCG_1 pe o direcție paralelă cu AB sau CD; punctul G_1 va ajunge în G, mijlocul lui $[AD]$, și vom avea un triunghi echilateral înscris în pătratul $ABCD$, cu latura de lungime 1. Cum minimul laturilor triunghiurilor înscrise în pătrat este 1, acesta va fi triunghiul minimal, iar aria sa:

$$\mathcal{A}_{EFG} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

va fi aria cea mai mică a triunghiurilor echilaterale înscrise.

Cazul în care E și F sînt în două vîrfuri opuse A și C ne conduce la un triunghi echilateral ACG_2 cu vîrful G_2 în afara pătratului.

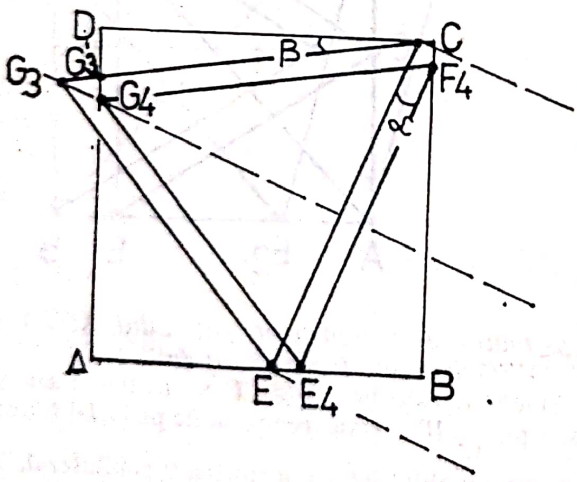
Dacă aplicăm o translație și o omotetie pe direcția diagonalei $[DB]$ pînă G_2 ajunge în D, vom obține triunghiul echilateral E_2F_2D înscris în pătrat și acestuia îi putem evalua lungimea laturilor. Unghiul $\widehat{DCG_2}$ are măsura 15°, fiindcă $m(\widehat{DFG_2}) = m(\widehat{ACG_2}) - m(\widehat{ACD})$.

În triunghiul dreptunghic DCF_2 vom avea:

$$DF_2 = \frac{DC}{\cos \widehat{F_2DC}} = \frac{DC}{\cos \widehat{DCG_2}} = \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{1}{\cos(45^\circ - 30^\circ)} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

Înălțimea va fi $\frac{\sqrt{3}}{2} DF_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ și deci aria triunghiului E_2F_2D va fi:

$$\mathcal{A}_{E_2F_2D} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \qquad (1)$$



Am fost conduși la cazul în care triunghiul E_2F_2D are un vîrf într-un vîrf al pătratului, iar celelalte două pe laturi.

Să observăm că laturile $[E_2D]$ și $[F_2D]$ fac unghiuri de 15° cu laturile vecine ale pătratului.

În cazul în care aceste unghiuri nu mai sînt egale avem (v. fig. c) $m(\widehat{BCE}) = \alpha > 15^\circ$ și $m(\widehat{DCG_3}) = \beta < 15^\circ$ vîrful G_3 va fi în afara pătratului. Într-adevăr:

$$CG_3 = EC = \frac{BC}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

iar dacă notăm cu G_3' intersecția laturii $[CG_3]$ cu $[AD]$, vom avea $CG_3' = \frac{DC}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta}$, dar, cum $\beta < \alpha$, rezultă $\cos \beta > \cos \alpha$ și $\frac{1}{\cos \beta} < \frac{1}{\cos \alpha}$, deci $CG_3' < CG_3$, cu alte cuvinte G_3 este în afara pătratului și *triunghiul* ECG_3, *avînd un vîrf în vîrful* C *al pătratului și latura* [EC] *făcînd cu* $[BC]$ *un unghi cu* $m(\widehat{BCE}) > 15^\circ$, *nu poate fi înscris în pătrat, avînd al treilea vîrf în afara acestuia.*

Putem însă aplica din nou o translație pe direcția înălțimii triunghiului ECG_3, care este axă de simetrie a acestuia și o omotetie pînă G_3 ajunge în G_4 la intersecția cu $[AD]$. Vîrfurile C și E vor ajunge respectiv în F_4 pe $[BC]$ și E_4 pe $[AB]$. Triunghiul astfel format are toate vîrfurile pe laturi ale pătratului.

Scanned with OKEN Scanner

îi vom putea evalua lungimile laturilor observînd că

$G_4F_4 = G_3'C = \frac{1}{\cos\beta}$. Cum $\beta < 15°$ rezultă $\frac{1}{\cos\beta} < \frac{1}{\cos 15°}$ și, prin urmare, $G_4F_4 < DF_2 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ și, astfel, *aria triunghiului* $F_4E_4G_4$ *va fi mai mică decît aria triunghiului* E_2F_2D *sau cel mult egală cînd* $\beta = \alpha = 15°$.

În acest mod am demonstrat că *maximul ariei triunghiurilor echilaterale înscrise în pătratul* ABCD *va fi atins de triunghiurile cu un vîrf într-un vîrf al pătratului, laturile pornind din acesta și făcînd cu laturile vecine ale pătratului unghiuri de 15° și acest maxim este* $\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$.

Comentarii : Problema a fost dată la Olimpiada Națională chineză, la etapa finală și este a șasea dintre cele șase probleme propuse. Soluția dată de noi se inspiră din cea menționată în revista *The Mathematics teacher*, dar diferă de aceasta prin două caracteristici : prima este demonstrația lemei preliminare, care în soluția menționată trece ca o observație fără nici o explicație, cea de a doua este folosirea translațiilor și omotetiilor pentru a transforma cazurile de imposibilitate în cazuri posibile. Aceasta a simplificat discuția și rezolvarea diverselor cazuri ; în plus, a eliminat unele considerații intuitive insuficient demonstrate în cazul cînd s-a aplicat o translație și o omotetie unui triunghi considerat ca înscris pentru a arăta că aria sa nu este mai mare decît $\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$, deci că nu poate atinge maximul.

Importanța acestei probleme constă în faptul că tratează o problemă de extremum prin mijloace geometrice păstrînd suficientă rigoare pentru a nu ridica probleme de suspiciune. Considerăm că evitarea metodelor analitice a adus simplificări și eleganță.

G.2. 1) *Fiind dat triunghiul echilateral* ABC, *să se construiască o ogivă* avînd ca săgeată înălțimea* [AH] *a triunghiului echilateral și trecînd prin celelalte două vîrfuri* B *și* C.

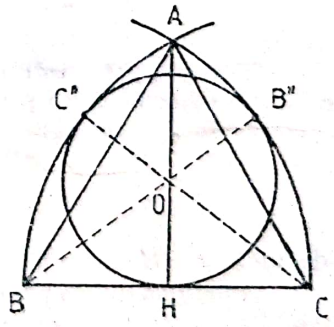
2) *Să se înscrie în această ogivă un cerc tangent și la baza ei* [BC].

N.T. Alpha, anul 16, nr. 6/1982

Soluție. 1) Avînd ca săgeată înălțimea $[AH]$ a triunghiului echilateral, care este și bisectoare și mediană, centrele celor două arce care constituie ogiva se vor găsi pe baza $[BC]$ în două puncte simetrice față de $[AH]$, iar tangentele în B și C vor fi perpendiculare pe $[BC]$. În același timp, pentru arcele trecînd prin A și B, respectiv A și C, $[AB]$ și $[AC]$ vor fi coarde, iar centrele vor fi la intersecțiile perpendicularelor în B', respectiv C', (B', C' fiind mijloacele acestor coarde) cu baza $[BC]$. Dar aceste perpendiculare, fiind mediatoare ale laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$, vor fi și înălțimi, deci vor trece prin B și C.

Astfel, cele două centre ale ogivei vor fi B, respectiv C.

Pentru a o trasa este suficient să descriem două arce de cerc cu raza de lungime $BC = 2a$, care se vor intersecta în vîrful A, care va fi și vîrf al ogivei. Cele două arce se vor intersecta sub un unghi de 120° în A, care este unghiul tangentelor la cele două arce în acest punct.



2) Pentru a găsi centrul O și lungimea r a razei cercului înscris în ogivă și tangent la baza $[BC]$, vom considera problema rezolvată și fie B'', C'' și H punctele de contact cu ogiva și baza acesteia. Condiția de racordare a cercurilor cu centrele în B și C cu cercul de centrul O este ca liniile centrelor să conțină punctele de contact, adică B, O și B'' pe de o parte, C, O și C'' pe de altă parte să fie coliniare.

Notînd $x = BO$, $r = OB'' = OH$, $a = BH$, în triunghiul BOH vom avea $x^2 = r^2 + a^2$ și $BB'' = 2a = BO + OB'' = x + r$, deoarece $[BB'']$ este rază în cercul care include arcul $\overset{\frown}{AC}$, la fel ca $[BC]$, de lungime $2a$.

Sistemul :

$$\begin{cases} x^2 = r^2 + a^2 ; \\ x + r = 2a \end{cases}$$

* Ogiva este figura geometrică formată din două arce de cerc, simetrice în raport cu $[AH]$, trecînd prin B, respectiv C și avînd în aceste puncte tangente perpendiculare pe baza $[BC]$.

Scanned with OKEN Scanner

conduce la relaţiia :

$$(2a - r)^2 = r^2 + a^2$$

sau $4ar = 3a^2$, de unde $r = \frac{3}{4}a$.

Prin urmare, soluţia este unică şi centrul O se va găsi pe $[AH]$, la distanţa $3a/4$ de bază.

Comentarii. Problema este formulată pe baza unui desen care reprezintă o ogivă şi cercul înscris. În revista *Alpha* se cere o descriere a construcţiei. Problema, ca şi soluţia, sînt formulate de noi. Să observăm că aceasta se rezolvă prin construcţii cu rigla şi compasul, dar necesită un calcul algebrico-geometric.

Faptul că O se găseşte la 3/4 din jumătatea deschiderii ogivei este o proprietate geometrică, dar soluţia noastră nu o poate stabili fără aplicarea teoremei lui PITAGORA.

Problema de construcţie a ogivei şi a cercului înscris acesteia se poate generaliza în mai multe moduri. Arhitecţii procedează prin încercări pentru a găsi forme cu anumite calităţi estetice, de exemplu, o săgeată mai înaltă, o deschidere mai mare etc.

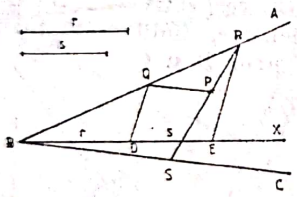
Arhitectura a pus şi pune probleme de construcţii geometrice interesante care cer demonstraţii riguroase şi, în acelaşi timp, dau satisfacţii estetice. Considerăm ca foarte instructive astfel de construcţii şi vom mai prezenta unele exemple generalizatoare sau distincte de cel dat, în cele ce urmează.

G.3. *Fie P un punct în interiorul unui unghi $\widehat{ABC}$ şi r şi s lungimile a două segmente. Să se ducă prin P o dreaptă care să intersecteze AB în R şi BC în S astfel încît :*

$$r \cdot PR = s \cdot PS.$$

Ontario Secondary School Math. Bull. vol. 20, nr. 1/1984

Soluţie : Pe o semidreaptă $[BX$ vom lua, în continuare segmentele $[BD]$ şi $[DE]$ de lungimi :



$$BD = r \text{ şi } DE = s.$$

Din P ducem $PQ \parallel BC$, unde $Q \in [BA]$ şi unim Q cu D.

Din E, ducînd $ER \parallel DQ$, determinăm punctul $R \in [BA]$. Unind R cu P şi prelungind obţinem punctul S pe $[BC]$.

Dreapta RPS este cea căutată. Într-adevăr, triunghiurile BDQ şi BER sînt asemenea, ca şi triunghiurile BRS şi QPR. În consecinţă , aplicînd teorema lui THALES, vom avea :

$$\frac{BD}{DE} = \frac{r}{s} = \frac{BQ}{QR} = \frac{PS}{PR},$$

de unde $r \cdot RP = s \cdot PS$.

Comentarii. Se poate pune problema dacă dreapta RPS astfel obţinută este unica posibilă. Pentru aceasta vom schimba semidreapta $[BX$ cu alta $[BY$ şi vom repeta construcţiile : vom lua pe $[BY$, punctul D' aşa că $BD' = r$ şi $D'E' = s$ şi vom uni D' cu Q şi vom duce din E' o paralelă la $D'Q$. Aceasta va întîlni pe $[BA]$ tot în R fiindcă $\frac{BQ}{QR} = \frac{r}{s} = \frac{BD'}{D'E'}$, deci reciproca teoremei lui THALES arată că R este unicul punct posibil pe $[BA]$.

G.4. *1) Să se construiască o ogivă de deschidere $BC = 2a$ şi săgeata $AH = h$, date.*

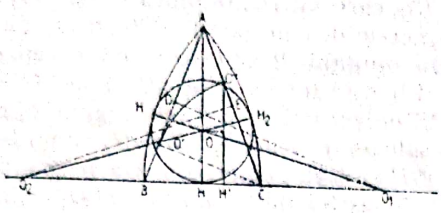
2) Să se înscrie în această ogivă un cerc tangent şi la baza ei $[BC]$.

3) Să se arate că aceste construcţii se pot efectua cu rigla şi compasul.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Triunghiul ABC este isoscel, deci are ca axă de simetrie înălțimea $[AH]$. Ogiva este formată din două arce de cerc simetrice în raport cu $[AH]$, trecînd prin B, respectiv C și avînd în aceste puncte tangente perpendiculare pe baza $[BC]$.

Este ușor de determinat cele două centre O_1 și O_2.



Cum $[AB]$, respectiv $[AC]$ sînt coarde, mediatoarele lor în D și E vor fi diametre, dar și segmentul $[BC]$ va fi inclus în diametrul comun celor două cercuri, deci la intersecțiile O_1 și O_2 ale mediatoarelor în D, respectiv E cu $[BC]$ vom avea cele două centre.

Ogiva se trasează imediat cu compasul luînd ca centre O_1 și O_2 și ca raze $[O_1B]$, $[O_2C]$ de lungime R.

Calculul lui R reiese din asemănarea triunghiurilor BO_1D și ABH, care au comun unghiul $\widehat{CBD}$ și sînt dreptunghice. Vom avea :

$$\frac{BO_1}{AB} = \frac{BD}{BH},$$

de unde $BO_1 = \dfrac{AB \cdot BD}{BH}$ și, ținînd seama de notațiile din enunț :

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + h^2} \cdot \sqrt{a^2 + h^2}}{2a} = \frac{a^2 + h^2}{2a} \tag{1}$$

sau $R = \dfrac{AB^2}{BC} = O_1B.$

Construcția unui segment de lungime R se realizează cu rigla și compasul, cum vom arăta la punctul 3).

2) Pentru a înscrie în ogivă un cerc tangent și la baza ei $[BC]$, va trebui să determinăm centrul O, care se găsește pe $[AH]$ și raza $[OH]$ de lungime r, unde H este punctul de contact al cercului cu $[BC]$. Vom nota :

$$O_1O = O_2O = x,\ OH_2 = OH_1 = OH = r,$$

unde H_1 și H_2 sînt punctele de contact ale ogivei cu cercul de centru O. Punctele O_1, O, H_1 pe de o parte, și O_2, O, H_2 pe de altă parte trebuie să fie coliniare, fiindcă cele două centre și punctele de contact sînt obligatoriu coliniare.

Considerăm triunghiul dreptunghic O_1OH în care aplicăm teorema lui PITAGORA, apoi, exprimînd lungimea lui $[O_1H_1]$, obținem relațiile :

$$\begin{cases} x^2 = r^2 + (R - a)^2 ; \\ x + r = R, \end{cases} \tag{2}$$

de unde $(R - r)^2 = (R - a)^2 + r^2$ sau :

$$2Rr = 2Ra - a^2, \tag{2'}$$

deci $r = \dfrac{a(2R - a)}{2R}$. Apoi, ținînd seama de valoarea lui R din (1) :

$$2R - a = \frac{h^2}{a},\quad r = \frac{ah^2}{a^2 + h^2} \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

și, sub forma geometrică :

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{AH}{AB}\right)^2 BC. \tag{3'}$$

Punctul O se va găsi deci la cota r, dată de (3), care va fi lungimea razei cercului de centru O. Unind O_1, respectiv O_2 cu O vom obține punctele de contact ale cercului O cu ogiva.

3) Construcțiile geometrice ale segmentelor de lungimi R și r se pot face cu rigla și compasul. Din (1) deducem $AB^2 = BC \cdot O_1B$, deci AB este medie proporțională între BC și O_1B. Vom considera $[AB]$ ca o catetă într-un triunghi dreptunghic, a cărei lungime este medie proporțională între lungimile ipotenuzei și a proiecției sale pe ipotenuză. În speță, cum $[BH]$ este proiecția lui $[AB]$ pe $[BC]$, vom avea $AB^2 = 2O_1B \cdot BH$ și deci, ducînd din A o perpendiculară pe $[AB]$, aceasta va intersecta pe $[BC]$ într-un punct B' astfel încît $BB' = 2BO_1 = 2R$. Mijlocul lui $[BB']$ va fi O_1, iar O_2 se va construi luînd $CO_2 = BO_1$.

Pentru construcția razei de lungime r observăm că din (3') putem deduce o altă expresie a lui r. Într-adevăr, vom avea :

$$AH = AB \sin B,\ r = \frac{1}{2} BC \sin^2 B. \tag{4}$$

Dar $BC \sin B = CD'$, unde D' este piciorul înălțimii duse din C pe AB, prin urmare :

$$r = \frac{1}{2} D'C \sin B. \tag{4'}$$

Dacă din C, considerat centru, și cu $[CD']$ ca rază descriem un arc de cerc obținem, la intersecția cu $[AC]$ punctul D'', astfel încît $D''C = CD'$. Fie H' piciorul perpendicularei coborîte din D'' pe $[BC]$; triunghiul $D''H'C$ este dreptunghic și vom avea :

$$D''H' = CD'' \sin C = CD' \sin B. \tag{5}$$

Introducînd în (4'), vom obține :

$$r = \frac{1}{2} D''H'. \tag{5'}$$

Luînd mijlocul lui $[D''H']$ și ducînd o paralelă la BC vom găsi centrul O al cercului. Construcția segmentului de lungime r este, deci, deosebit de simplă și, în plus, paralela la BC dusă din D'' este tangentă la cercul de centru O în punctul unde intersectează pe $[AH]$.

Comentarii. Problema este o generalizare a problemei **G.2.** unde ogiva era circumscrisă unui triunghi echilateral. Dacă luăm $AB = BC = 2a$, din (1) vom deduce imediat $R = 2a = BC$ și centrele ogivei vor fi în B și C. În ceea ce privește r, din (2') vom deduce $r = \frac{3a^2}{4a} = \frac{3}{4}a$, regăsind rezultatele respective din problema **G.2.**

În privința construcției lui R observăm că triunghiul O_1AB este isoscel, avînd ca bază pe $[AB]$ și unghiurile adiacente congruente cu $\hat{B}$, deci este asemenea cu triunghiul ABC, raportul de asemănare fiind $\frac{AB}{BC}$.

În aceste condiții, din (1) deducem $R = \frac{AB^2}{BC}$ și construcția centrelor O_1 și O_2 devine extrem de simplă : ducînd semidreapta $[AO_1$ astfel încît $\widehat{BAO_1} \equiv \widehat{ABC}$, obținem centrul O_1 al ogivei și $BO_1 = R$.

Astfel, construcția ogivei și a cercului de centru O înscris devine elegantă și deosebit de simplă.

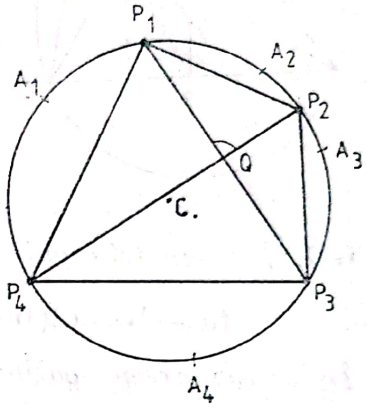
Arhitectura oferă, prin construcțiile unora dintre elementele ei, probleme de construcții geometrice ingenioase și cu calități estetice remarcabile. Este demnă de admirație ingeniozitatea arhitecților care le-au imaginat, fără a avea însă și posibilitatea de a le demonstra riguros.

Scanned with OKEN Scanner

G.5. *Dacă se împarte un cerc în patru arce prin punctele consecutive* A_1, A_2, A_3, A_4, *și se iau mijloacele* P_1, P_2, P_3, P_4, *ale arcelor consecutive* $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_4}$, $\overset{\frown}{A_4A_1}$, *patrulaterul convex inscriptibil* $P_1P_2P_3P_4$ *este ortodiagonal.*

Parabola, Vol. 18, nr. 2/1983

Soluție. Fie 2α, 2β, 2γ, 2δ măsurile arcelor $\overset{\frown}{A_1A_2}$, $\overset{\frown}{A_2A_3}$, $\overset{\frown}{A_3A_4}$, $\overset{\frown}{A_4A_1}$. Măsurile arcelor $\overset{\frown}{P_1P_2}$, $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_4}$, $\overset{\frown}{P_4P_1}$ vor fi $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\delta$, $\delta+\alpha$. Fie Q punctul de intersecție ale celor două diagonale $[P_1P_3]$ și $[P_2P_4]$.



Cum $\widehat{P_1QP_2}$ este un unghi cu vîrful în interiorul cercului vom avea :

$$m(\widehat{P_1QP_2}) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}(\delta+\gamma). \qquad (1)$$

În același timp :

$$2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 2\pi,$$

deci :

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{\pi}{2}. \qquad (1')$$

Introducînd (1') în (1) vom obține :

$$m(\widehat{P_1QP_2}) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{\pi}{2}$$

ceea ce arată că $P_1P_2P_3P_4$ este un patrulater ortodiagonal.

Comentarii. Enunțul problemei era întrucîtva diferit de cel propus de noi : se referea la împărțirea unui arc în patru arce consecutive, se luau mijloacele acestora și se cerea să se arate că două dintre coardele ce unesc aceste mijloace sînt ortogonale.

Enunțul nostru este mai precis și, în același timp, pune în evidență un patrulater convex inscriptibil remarcabil.

Procedeul poate fi continuat luîndu-se mijloacele arcelor $\overset{\frown}{P_1P_2}$, $\overset{\frown}{P_2P_3}$, $\overset{\frown}{P_3P_4}$, $\overset{\frown}{P_4P_1}$. Se obține un al doilea patrulater convex inscriptibil ortodiagonal și considerăm că ar fi interesant de studiat relațiile acestuia cu primul. Există motive să credem că punctul de intersecție al diagonalelor ar fi tot Q.

În orice caz, problema pune în evidență o proprietate remarcabilă care se poate demonstra cu mijloace elementare, bazate pe măsura unghiurilor dintr-un cerc. Aceasta a făcut parte din cele propuse în 1982 la concursul școlar de matematică în Australia pentru divizia seniori, deci pentru elevi de liceu.

G.6. *Fie* O *centrul cercului circumscris unui patrulater inscriptibil* ABCD, *cu diagonalele perpendiculare,* P *punctul de intersecție al diagonalelor și* M *mijlocul laturii* [AB]. *Să se demonstreze că :*

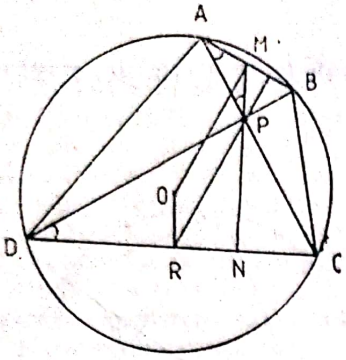
a) $PM \perp CD$;

b) $OM = \frac{1}{2} CD$.

Soluție. a) Fie $\{N\} = PM \cap CD$. În triunghiul DNP, $m(\sphericalangle DNP) = 180° - m(\sphericalangle NDP) - m(\sphericalangle NPD)$. Dar $\sphericalangle NDP \equiv \sphericalangle CAB$ (patrulaterul fiind inscriptibil), de unde avem

$\sphericalangle NPD \equiv \sphericalangle APM$, căci $[PM]$ este mediană în triunghiul dreptunghic APB și deci $PM = AM$, adică $\sphericalangle APM \equiv PAM$; pe de altă parte $\sphericalangle NPD \equiv \sphericalangle MPB$ (opuse la vîrf).

Deci:



$m(\sphericalangle NDP) + m(\sphericalangle NPD) = m(\sphericalangle APM) + m(\sphericalangle MPB) = m(\sphericalangle APB) = 90°$.

Rezultă că $m(\sphericalangle DNP) = 180° - 90° = 90°$, de unde $PM \perp CD$.

b) Fie R mijlocul lui $[DC]$. Analog ca la punctul anterior, demonstrăm că $PR \perp AB$.

Avem $RP \parallel MO$ (perpendiculare pe AB) și $PM \parallel OR$ (perpendiculare pe CD). Deci patrulaterul $OMPR$ este paralelogram și astfel $OM = PR = \frac{1}{2} CD$, deoarece $[PR]$ este mediană în triunghiul dreptunghic DPC, deci lungimea acesteia este jumătate din lungimea lui $[DC]$.

G.7. *Într-un triunghi oarecare demonstrați inegalitatea:*

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leqslant abc.$$

În ce caz avem egalitate?

A. Podoa, **Period. Mat. (4) 5 (1925), p. 80–85**

Soluție. Avem:

$$\sqrt{a^2 - (b-c)^2} \leqslant a,\ \sqrt{b^2 - (c-a)^2} \leqslant b,\ \sqrt{c^2 - (a-b)^2} \leqslant c$$

sau, înmulțind, obținem:

$$\sqrt{(a+b-c)^2 (b+c-a)^2 (c+a-b)^2} \leqslant abc. \tag{1}$$

Dar, a, b, c fiind lungimile laturilor unui triunghi avem $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$, $c + a - b > 0$ și, astfel, din (1) deducem imediat inegalitatea din enunț.

Observație. Din inegalitatea din enunț deducem ușor cunoscuța inegalitate a lui Euler: $R \geqslant 2r$. Ținînd cont de formulele $R = \frac{abc}{4\mathcal{S}}$, $r = \frac{\mathcal{S}}{p}$ inegalitatea $R \geqslant 2r$ se transcrie $pabc \geqslant 8\mathcal{S}^2$ și ținînd cont de formula lui Heron $\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, inegalitatea de mai sus revine la cea din enunț.

G.8. *Într-un triunghi oarecare au loc inegalitățile:*

$$3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca).$$

În ce caz avem egalitate?

F. E. Wood, Amer. Math. Monthly (AMM), 45/1938, p. 551

Soluție. Avem

$$2bc \leqslant b^2 + c^2,\ 2ca \leqslant c^2 + a^2,\ 2ab \leqslant a^2 + b^2,$$

și adunînd aceste inegalități și apoi adunînd în ambii membri $2(ab + bc + ca)$, obținem:

$$3(ab + bc + ca) \leqslant (a + c)^2,$$

cu egalitate dacă $a = b =$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi avem :

$$|b - c| < a, \ |c - a| < b, \ |a - b| < c$$

sau :

$$(b - c)^2 < a^2, \ (c - a)^2 < b^2, \ (a - b)^2 < c^2.$$

Adunînd aceste inegalităţi obţinem :

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

sau :

$$(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca).$$

G.9. *Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are trei unghiuri obtuze, diagonala corespunzătoare celui de-al patrulea unghi este mai lungă decît cealaltă diagonală a patrulaterului.*

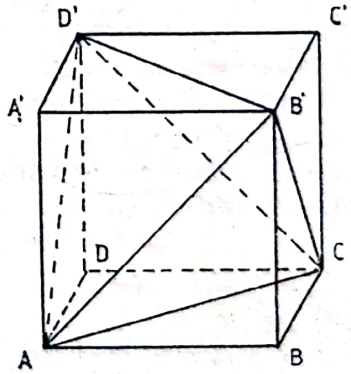
Olimpiada de Matematică, R. P. Ungară

Soluţie. Se descrie un cerc avînd ca diametru diagonala care iese din unghiul ascuţit Celelalte două vîrfuri ale patrulaterului sînt situate în interiorul acestui cerc deoarece, prin enunţ, unghiurile din aceste vîrfuri sînt obtuze şi deci diagonala care trece prin acestea este mai scurtă decît diametrul.

G.10. *Să se găsească numărul minim de tetraedre în care poate fi descompus un cub.*

Olimpiada de Matematică, U.R.S.S.

Soluţie. Cum se observă din figura de mai jos, un cub poate fi descompus în cinci tetraedre. Dacă se separă tetraedrele $A'AB'D'$, $C'CB'D'$, $BB'AC$ şi $DD'AC$, rămîne tetraedrul regulat $B'D'AC$. Vom demonstra că cinci este numărul minim de tetraedre în care un cub poate fi descompus în tetraedre.



Fie cubul cu muchia de lungime a descompus în cîteva tetraedre. Cel puţin două din acestea au baza aşezată pe faţa $(ABCD)$ a cubului (faţa cubului este un pătrat şi nu poate fi faţă pentru nici un tetraedru). Absolut analog există cel puţin două tetraedre a căror bază este aşezată pe faţa $(A'B'C'D')$ a cubului. Aceste tetraedre sînt, evident, diferite de primele două, deoarece tetraedrul nu poate avea două feţe paralele.

Astfel, se constată existenţa a cel puţin 4 tetraedre. Aceste 4 tetraedre nu pot umple cubul, deoarece suma volumelor primelor două nu depăşeşte $\frac{a^3}{3}$ (suma ariilor bazelor nu depăşeşte a^2 şi înălţimea fiecăruia nu depăşeşte a), suma valumelor ultimelor două tetraedre nu depăşeşte $\frac{a^3}{3}$, iar volumul cubului este a^3. Astfel, există cel puţin un al cincilea tetraedru, căci suma volumelor celor 4 tetraedre nu depăşeşte $\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3} < a^3$.

Scanned with OKEN Scanner

G.11. *Arătați că lungimile tuturor laturilor unui patrulater inscriptibil înscris într-un cerc cu raza de lungime 1 nu pot fi mai mari decît* $\sqrt{2}$.

Olimpiada de Matematică, Canada. 1969

Soluție. Notînd cu a, b, c, d lungimile laturilor patrulaterului, iar cu e și f lungimile diagonalelor patrulaterului și aplicînd teorema lui PTOLEMEU avem :

$$ac + bd = ef. \tag{1}$$

Presupunînd că $a, b, c, d > \sqrt{2}$ rezultă că $ac + bd > (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$, imposibil deoarece $\max ef = 4$ și intrăm în contradicție cu teorema lui PTOLEMEU. Deci, presupunerea făcută este absurdă și, astfel, enunțul este adevărat.

G.12. *Fie dat un triunghi oarecare* ABC *și un punct* A′ *exterior triunghiului. Se unește* A′ *cu* B *și* C *și fie* L *și* M *respectiv picioarele perpendicularelor din* A *pe* A′B, *respectiv* A′C.

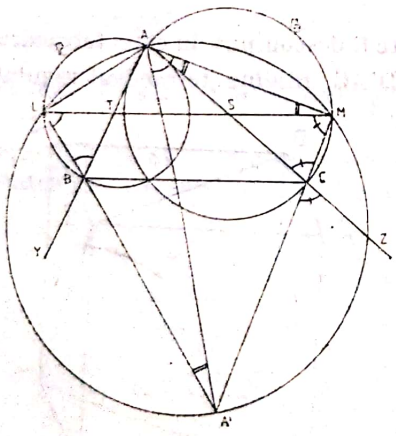
Cum trebuie ales A′ *pentru ca segmentul* [LM] *să aibă o lungime maximă* l_{max} ?

G. H. Lawden, The mathematical Gazette, vol. 66, nr. 436/1982

Soluție. Cum $m(\widehat{AMC}) = \frac{\pi}{2}$ și $m(\widehat{ALB}) = \frac{\pi}{2}$, punctele M și L se găsesc, respectiv pe două cercuri Γ_B și Γ_C avînd ca diametru pe $[AC]$, respectiv pe $[AB]$. Problema revine să găsim maximul distanței între două puncte M și L alese pe cele două cercuri.

Ori, distanța de la un punct dat M exterior cercului Γ_C la un punct L de pe acest cerc este maximă cînd semidreapta $[ML$ trece prin centrul T al acestui cerc, deci prin mijlocul T al lui $[AB]$.

Într-adevăr, ducînd din M cele două tangente la cercul Γ_C, orice secantă dusă prin M intersectează cercul în două puncte, iar distanța de la M la cel mai îndepărtat este mai lungă decît lungimea tangentelor din M. Aceasta se vede ducînd razele din T corespunzătoare punctelor de contact și observînd că segmentele cuprinse între M și punctele de intersecție cu razele respective sînt mai lungi decît tangentele din M. Ori, dintre aceste secante, cea care trece prin centrul T al cercului este cea mai lungă, cum se poate evalua imediat, ca oblică avînd piciorul cel mai îndepărtat de piciorul tangentei, la care se adaugă raza cercului, față de o semicoardă oarecare.



În mod analog distanța de la L, exterior cercului Γ_B, la M situat pe acest cerc este maximă cînd $[LM]$ trece prin centrul S al cercului Γ_B.

Să notăm prin a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC. Vom putea evalua maximul lui $[LM]$, observînd că $[ST]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci că $ST = \frac{a}{2}$. Cum lungimea razei cercului Γ_C este $\frac{c}{2}$, iar a cercului Γ_B este $\frac{b}{2}$, vom avea :

$$SM = SC = \frac{b}{2}\ ;\quad TL = TB = \frac{c}{2},$$

de unde

$$l_{max} = \max ML = \frac{1}{2}(a + b + c) = p. \tag{1}$$

Să determinăm și poziția lui A'. Vom observa că patrulaterul $ALA'M$ este inscriptibil și vom evalua unghiurile :

$$m(\widehat{CAA'}) = m(\widehat{MAA'}) - m(\widehat{MAC}) = m(\widehat{MLA'}) - m(\widehat{AML}) = m(\widehat{LBA}) - m(\widehat{AA'L}) =$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - m(\widehat{LAB})\right] - \left[\frac{\pi}{2} - m(\widehat{A'AL})\right] = m(\widehat{A'AL}) - m(\widehat{LAB}) = m(\widehat{BAA'}),$$

deoarece $\widehat{MAA'} \equiv \widehat{MLA'}$, ca având aceeași măsură în cercul circumscris patrulaterului $ALA'M$, $\widehat{MAC} \equiv \widehat{AML}$ din triunghiul isoscel MAS, $\widehat{MLA'} = \widehat{LBA}$ din triunghiul isoscel TLB, $\widehat{AML} \equiv \widehat{AA'L}$ ca având aceeași măsură etc.

Cum $\widehat{CAA'} \equiv \widehat{BAA'}$ semidreapta $[AA'$ este bisectoarea interioară a unghiului $\hat{A}$ în triunghiul ABC.

Să notăm cu $[AY$ și $[AZ$, semidreptele ce includ segmentele $[AB]$, $[AC]$. Cum $[LM]$ este paralelă cu $[BC]$:

$$m(\widehat{A'CB}) = \pi - [m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACM})] = \pi - [m(\widehat{SMC}) + m(\widehat{MSC})] =$$

$$= m(\widehat{MCS}) = m(\widehat{A'CZ}),$$

deoarece $\widehat{ACB} \equiv \widehat{MSC}$ ca alterne interne, $\widehat{ACM} \equiv \widehat{SMC}$ din triunghiul isoscel SMC, iar $\widehat{MCS}$ este al treilea unghi în triunghiul MSC.

Din $\widehat{A'CB} \equiv \widehat{A'CZ}$ rezultă că $[CA'$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{C}$ din triunghiul ABC. În mod analog, $[BA'$ va fi bisectoarea exterioară a unghiului $\hat{B}$ și, în consecință, A' este centrul cercului exînscris triunghiului ABC corespunzător, opus vîrfului A.

Comentarii : Problema este extrasă dintr-un articol intitulat *Două probleme de maximizare relative la un triunghi*, semnat de G.H. LAWDEN.

Enunțul original nu specifică faptul că A' este exterior triunghiului ABC. Se poate aborda problema și în cazul unui punct interior, cu rezultate similare, dar nu identice. Soluția prezentată în cele ce precedă este elegantă și pune în evidență o proprietate remarcabilă a configurației formată din triunghiul ABC, cele două cercuri descrise pe $[AB]$ și $[AC]$ ca diametre și centrul A' al cercului exînscris opus lui A. Ea nu folosește decît proprietăți ale unghiurilor, care apar în această configurație și asigură pe cale elementară găsirea maximului distanței dintre două puncte de pe cercurile descrise pe $[AB]$ și $[AC]$ ca diametri.

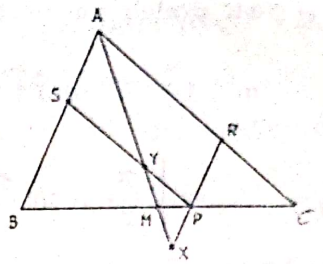
G.13. *Fie* P *un punct arbitrar pe* [BC] *în triunghiul* ABC *și* S *intersecția paralelei din* P *la* AC *cu* [AB], R *intersecția paralelei din* P *la* AB *cu* [AC] *și* M *piciorul medianei duse din* A *pe* [BC].

Să notăm cu Y *intersecția lui* [SP] *cu* [AM] *și cu* X *intersecția lui* [SP] *cu* [PR].

Să se demonstreze că M *este mijlocul lui* [XY].

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie. Din asemănarea triunghiurilor ABM şi XPM, obţinem $\frac{MX}{MA} = \frac{MP}{MB}$, iar din asemănarea triunghiurilor MAC şi MPY,



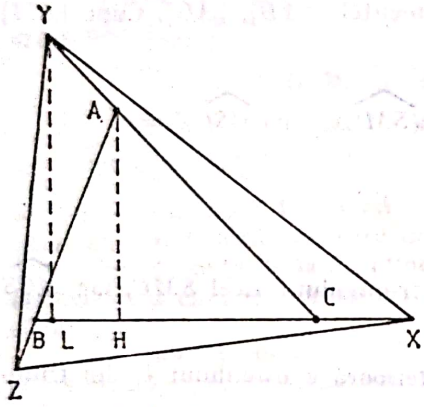
deducem $\frac{MY}{MA} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MB}$, fiindcă $MB = MC$.

Egalînd $\frac{MX}{MA} = \frac{MY}{MA}$, deducem $MX = MY$.

G.14. *Fiind dat triunghiul* ABC *de arie* $\mathcal{A}$, *dată, se prelungesc laturile sale cu segmente cu lungimile egale cu de* k $-$ 1 *ori laturile respective pînă în punctele* X, Y, Z, *respectiv pe* BC, CA, AB.

Să se calculeze aria triunghiului XYZ *în funcţie de aria* $\mathcal{A}$ *a lui* ABC.

Parabola, Vol. 20 nr. 2/1984



Soluţie. Triunghiul poate fi ascuţitunghic sau obtuzunghic, fără modificări de raţionament (a se vedea figura).

Triunghiul XYZ se descompune în 4 triunghiuri din care unul este ABC. Aria triunghiului CXY este $\frac{1}{2} \cdot CX \cdot YL$, unde L este piciorul înălţimii duse din Y. Fie H piciorul înălţimii duse din A pe $[BC]$ în triunghiul ABC.

Din asemănarea triunghiurilor YCL şi ACH, cum $AY = (k-1)CA$, $CY = kCA$ rezultă $YL = kAH$. În aceste condiţii :

$$\mathcal{A}_{CXY} = \frac{1}{2}(k-1)\, BC \cdot kAH = k(k-1)\frac{1}{2} BC \cdot AH = k(k-1)\, \mathcal{A}_{ABC}.$$

Rezultate similare se obţin şi pentru celelalte triunghiuri :

$$\mathcal{A}_{AYZ} = k(k-1)\, \mathcal{A}_{ABC};\ \mathcal{A}_{BZX} = k(k-1)\, \mathcal{A}_{ABC}$$

i, în total :

$$\mathcal{A}_{XYZ} = [3k(k-1) + 1] \cdot \mathcal{A}_{ABC}.$$

Comentarii : În enunţul original $\mathcal{A}_{ABC} = 1$ şi $k = 3$, deci $\mathcal{A}_{XYZ} = 19$.

G.15. *Fiind dat un patrulater* ABCD *convex şi o dreaptă* d *în planul său, au loc următoarele proprietăţi :*

1) *Condiţia necesară şi suficientă ca* d *să fie o axă de simetrie pentru* ABCD *este ca ea să conţină o diagonală a patrulaterului şi, în acest caz acesta să fie un pseudoromb sau ca ea să intersecteze două laturi ale patrulaterului în mijloacele acestora şi, în acest caz, acesta să fie un trapez isoscel.*

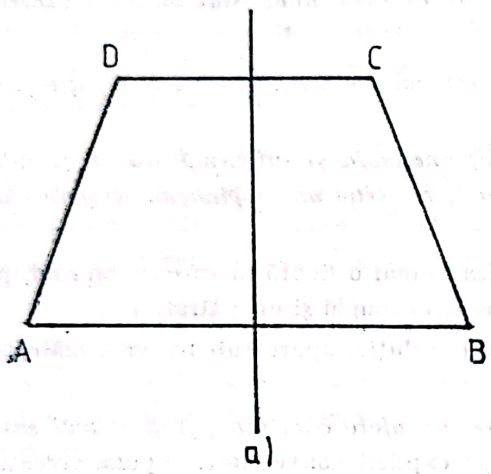
2) *Dacă* ABCD *admite o a doua axă de simetrie* d', *el este un romb, un dreptunghi sau un pătrat şi reciproc.*

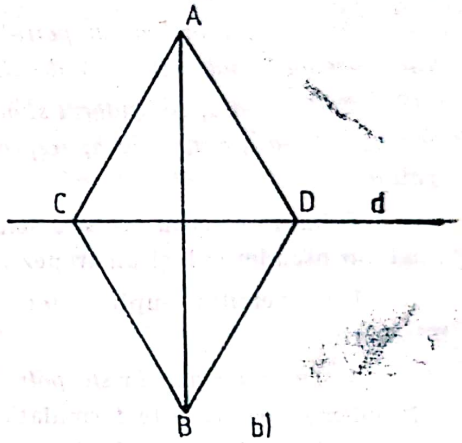
Acad. N. Teodorescu

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. 1) Dacă d este axă de simetrie pentru patrulaterul $ABCD$, ea nu poate intersecta decît cel mult două laturi ale acestuia și acestea vor fi paralele între ele. Într-adevăr, pentru orice latură intersectată, d trebuie să fie mediatoare. Dacă d intersectează două laturi între vîrfuri, acestea trebuie să fie paralele și s-o admită ambele ca mediatoare. Cele 4 vîrfuri vor fi două cîte două simetrice față de d, de exemplu A și B, pe de o parte, C și D pe de altă parte. Din cauza convexității, d nu mai poate intersecta laturile patrulaterului în alte puncte, iar A și B vor fi în cele două semiplane determinate de d, C și D de asemenea, iar $[AC]$ și $[BD]$ vor fi, fiecare într-unul dintre aceste semiplane (fig. a).

În consecință, $ABCD$ va fi convex, $[AC]$ simetricul lui $[BD]$ și deci $ABCD$ va fi trapez isoscel.





Dacă d întîlnește o singură latură, de exemplu, $[AB]$ ea va fi mediatoare a acesteia. Vîrful C va trebui să fie pe d, fiindcă, în caz contrar, el ar avea un simetric C' față de d, iar CC' ar admite pe d ca mediatoare, deci AB și CC' ar fi paralele și d ar întîlni două laturi ale lui $ABCD$, C' ar coincide cu D și ne-am găsi în cazul precedent al trepezului isoscel.

Dacă C este pe d, aceeași proprietate trebuie s-o aibă și D; în caz contrar, poligonul ar avea 4 vîrfuri A, B, C, D și D', simetricul lui D față de d. În consecință, C și D, sînt pe d. Cum $ABCD$ este convex, $[AB]$ unind două puncte ale sale, trebuie să rămînă interior lui $ABCD$ deci C și D sînt separate de $[AB]$, *care nu poate fi latură, ci diagonală*, ca și $[CD]$. Dar $AB \perp CD$ și, în aceste condiții $ABCD$ este un pseudoromb, avînd $AC = BC$ și $AD = DB$.

Prin urmare, condițiile impuse sînt, respectiv, necesare pentru ca d să fie axă de simetrie și ca figurile să fie, respectiv, un trapez isoscel, sau un pseudoromb convex. Condițiile sînt pe rînd și suficiente. Într-adevăr dacă $ABCD$ este un pseudoromb și d este diagonala ce unește vîrfurile C și D astfel încît $CA = CB$, A și B vor fi simetrice față de această diagonală, D se va găsi pe ea și vom avea $DA = DB$, deci d va fi axă de simetrie.

Dacă $ABCD$ este trapez isoscel și d unește mijloacele M, N ale celor două laturi paralele, atunci A este simetricul lui B, C simetricul lui D, în raport cu d, $[AC]$ simetricul lui $[BD]$ și prin urmare, d este axă de simetrie a trapezului isoscel.

2) Cea de-a doua axă de simetrie d' trebuie să fie, conform punctului 1), o diagonală sau o mediatoare a două laturi opuse paralele.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, în primul caz, pseudorombul $ABCD$, avînd și diagonala AB ca axă de simetrie, va fi un romb, deoarece D va fi simetricul lui C în raport cu $d' \perp d$ și, deci, $BC = BD$

Un caz particular al rombului $ABCD$ va fi pătratul, atunci cînd toate unghiurile sale vor fi de măsură $\frac{\pi}{2}$.

Dacă d' este mediatoare a laturilor $[AC]$ și $[BD]$, acestea trebuie să fie paralele și trapezul isoscel $ABCD$ devine dreptunghi. Dacă, în plus, $[AC] \equiv [AB]$, dreptunghiul va deveni pătrat. Prin urmare, pătratul este caz particular în ambele ipoteze asupra celei de-a doua axe de simetrie. În consecință, pătratul va avea patru axe de simetrie, două fiind diagonale și celelalte două mediatoare.

Comentarii. Problema se inspiră din articolul „*Axialsymetrie*" semnat E. Quaisser și H. I. Spiengel, din Alpha, vol. 18, nr. 4, p. 80—81/1984 unde sînt date ca exerciții următoarele enunțuri :

1) *Să se arate că un patrulater este un zmeu (pseudoromb) atunci cînd (cel puțin) una din diagonalele sale este axă de simetrie.*

2) *Să se dea, cu ajutorul simetriei axiale o condiție necesară și suficientă ca un patrulater* ABCD *să fie un romb, respectiv un trapez isoscel, respectiv un dreptunghi, respectiv un pătrat.*

Primul exercițiu are și o soluție, cel de al doilea numai o figură în care se cuprind, pe lîngă un pseudoromb și un trapez isoscel, un romb, un dreptunghi și un pătrat.

Un exercițiu suplimentar, de asemenea, fără soluție, apare sub forma următoarei întrebări :

3) *De ce nu mai există patrulatere axialsimetrice în afara celor din figura de mai sus?*

Problema noastră este formulată astfel încît impune explicit convexitatea și pune accentul pe existența uneia sau a două axe de simetrie, dîndu-se demonstrații exhaustive, care răspund și acestei a treia întrebări.

Scopul acestei culegeri fiind metodologic, demonstrațiile noastre caută să elimine afirmații intuitive insuficient justificate. Ele folosesc exclusiv proprietățile metrice și topologice ale simetriei axiale, respectiv caracterul de mediatoare a axelor de simetrie, convexitatea figurilor și separarea planului în două semiplane prin axele de simetrie, ceea ce impune ca figurile simetrice în raport cu acestea să fie jumătate într-unul și cealaltă jumătate în cel de-al doilea semiplan, prin oglindire.

G.16. *Fiind dat un triunghi oarecare* ABC, *să se demonstreze următoarele afirmații :*

1) *Condiția necesară și suficientă ca o dreaptă* d *să fie axă de simetrie pentru acest triunghi este ca* ABC *să fie isoscel în* A(AB = AC) *și ca* d *să conțină înălțimea* AA' *dusă din* A;

2) *Condiția necesară și suficientă ca triunghiul* ABC *să aibă două axe de simetrie este ca acesta să fie echilateral.*

3) *Numărul maxim de axe de simetrie pentru un triunghi* ABC *este trei, cînd triunghiul este echilateral.*

Acad. N. Teodorescu

Scanned with OKEN Scanner

Soluție. Vom observa că dacă d este axă de simetrie în triunghiul ABC, aceasta trebuie să treacă printr-un vîrf, de exemplu A, și să intersecteze latura opusă $[BC]$.

Într-adevăr, dacă d nu intersectează laturile lui ABC și nici nu trece printr-un vîrf, de exemplu A, simetricele M' ale punctelor M de pe laturile lui ABC în raport cu d vor fi în afara laturilor acestuia, găsindu-se pe perpendicularele MM' pe d, în semiplanul opus celui care conține triunghiul ABC, determinat de d. Prin urmare, d trebuie să intersecteze laturile lui ABC. Fiind un poligon convex, d poate intersecta cel mult două laturi, de exemplu AC și BC. Pentru a fi axă de simetrie ea trebuie să fie mediatoarea acestora, pentru ca simetricul lui A să fie C și simetricul lui C să fie B, ceea ce este imposibil. Deci, d nu poate fi mediatoare decît a uneia din aceste laturi, să zicem BC, și să treacă prin A, a cărui simetric va fi atunci, el însuși. Deci, în acest caz, dacă a este intersecția lui d cu BC, vom avea $aC = aB$ și $d \perp BC$. Triunghiurile dreptunghice ACa și ABa vor fi congruente și triunghiul ABC va fi, isoscel. Condiția este deci necesară. Ea este și suficientă, fiindcă dacă ABC este isoscel în A iar d conține înălțimea $|Aa|$, aceasta este și mediatoare a segmentului $[BC]$ și deci axă de simetrie pentru ABC.

2) Dacă ABC este echilateral, înălțimile duse din A și B vor fi mediatoare pentru $[BC]$ și $[CA]$ și deci, axe de simetrie, deci condiția este suficientă. Dacă ABC are două axe de simetrie trecînd respectiv prin A și B, acesta este isoscel atît în A cît și în B și deci este echilateral; în consecință, condiția este și necesară.

3) Dacă ABC are 3 axe de simetrie, acestea vor fi mediatoarele laturilor sale, care vor fi congruente, și triunghiul va fi echilateral și reciproc.

Dacă ar exista o a patra axă de simetrie aceasta ar trebui să fie mediatoarea uneia din laturi și să treacă prin vîrful opus, adică se va confunda cu una din cele 3 axe presupuse existente.

Comentarii: Problema este inspirată dintr-un exercițiu cu enunțul următor: *Să se determine toate axele de simetrie ale unui triunghi echilateral ABC.* A se vedea *Alpha*, *Anul* 18, *nr.* 4 p. 80/1984. Soluția se bazează acolo pe observația că într-un triunghi echilateral mediatoarele laturilor trec prin vîrfurile opuse și ca atare sînt axe de simetrie. Reciproc, axa de simetrie va trebui să fie mediatoare a unei laturi și să treacă prin vîrful opus, de unde existența a trei axe de simetrie; înălțimile fiind și mediatoare ale celor trei laturi.

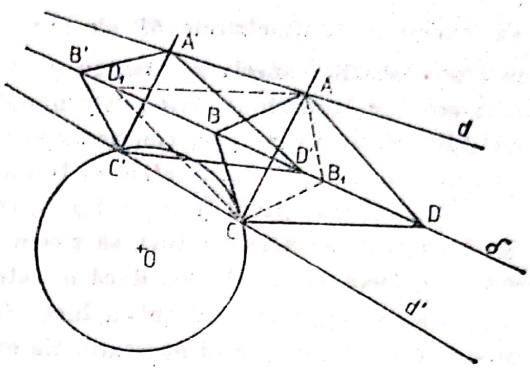
G.17. 1) *Fiind date două drepte* d *și* δ *și un cerc de centru O, să se construiască un pseudoromb* ABCD, *de laturi* [CB] *și* [CD] *date, avînd vîrful* A *pe* d, *vîrfurile* B *și* D *pe* δ, *iar vîrful* C *pe cercul de centru O. Să se studieze cazurile particulare posibile.*

Soluție: 1) Figura $ABCD$ fiind un pseudoromb cu vîrfurile B și D pe δ, dacă $AB \neq AD$, dreapta δ trebuie să fie axă de simetrie și, în consecință, mediatoarea diagonalei $[AC]$.

Construind simetrica d' a lui d față de δ, punctul C trebuie să se găsească pe d'. Cum C este și pe cercul de centru O, va fi la intersecțiile lui d' cu O. Vor fi, deci, două soluții C și C', dacă d' este secantă, una dacă d' este tangentă și nici una dacă d' este exterioară cercului.

Construcția rezultă imediat: se trasează simetrica d' a lui d în raport cu δ. Dacă aceasta întîlnește cercul de centru O în două puncte C și C', fiecare va fi vîrf al unui pseudoromb-soluție. Cu compasul se descrie un cerc cu centrul în C, de rază dată $CD = CD_1$ și se obține

vîrful D, respectiv D_1, simetrice față de AC, ca axă de simetrie. Tot cu centrul în C se descrie un cerc de rază dată $CB = CB_1$ și se obține vîrful B, respectiv B_1, simetrice de asemenea față de AC ca axă de simetrie. Am obținut în acest fel două soluții $ABCD$ și AB_1CD_1 simetrice față de diagonala $AC \perp \delta$.



Repetînd construcția în punctul C' cu raze date $C'D' = C'D_1'$ și $C'B' = C'B_1'$, ambele egale cu cele din prima soluție, obținem încă două pseudoromburi $A'B'C'D'$ și $A'B_1'C'D_1'$ simetrice față de $A'C'$ și avînd laturile egale cu cele ale lui $ABCD$.

Discuție: Dreptele d și δ pot fi concurente sau paralele. Dacă sînt concurente într-un punct P, acesta poate fi exterior cercului O, pe cerc sau interior acestuia.

Dreptele d și δ pot fi de asemenea exterioare cercului O, ambele secante sau numai una, cealaltă fiind exterioară sau tangentă. Aceste poziții nu joacă un rol deosebit, ci numai faptul dacă d' simetrica lui d față de δ intersectează, este tangentă sau exterioară cercului O.

Faptul că punctul P de intersecție al lui d cu δ este exterior sau interior nu modifică soluțiile. Dacă însă P este pe cercul O se pierd soluțiile obținute prin cel de al doilea punct de intersecție C' cu d'. Rămîn cele două pseudoromburi $ABCD$, AB_1CD_1 care au un vîrf în C, altul în A pe $CA \perp \delta$ și celelalte două pe δ.

2) Cazurile particulare sînt de patrulatere $ABCD$, care au vîrfurile B și D pe δ care este ax de simetrie, vîrful A fiind pe d și C pe cercul de centru O. Acestea trebuind să fie pseudoromburi, pot fi romburi dacă $BD \neq AC$ și $CB = CD$ sînt date și pot fi pătrate dacă $BD = AC$. În acest caz nu se mai pot da $CB = CD$, ci rezultă din congruența celor două diagonale perpendiculare $AC = BD$.

Comentarii: Problema este sugerată de un exercițiu de construcție geometrică din articolul *„Axial symetrie"* publicat în revista *Alpha* vol. 18, nr. 4, p. 80—81. Enunțul acelui exercițiu este:

Fiind date două drepte, d *și* δ *și un cerc de centru* O, *să se construiască un pătrat* ABCD *astfel încît* $A \in$ d, B, $D \in \delta$ *și* C *să fie pe cercul de centru* O.

Soluția respectivă presupune problema rezolvată; deduce apoi construcția, dar nu discută decît existența punctelor C și C', fără a examina pozițiile relative ale dreptelor d și δ și a cercului de centru O. Enunțul exercițiului privește exclusiv construcția pătratului, celelalte două patrulatere, construibile analog și mai generale, nefiind concepute ca atare.

Generalizarea dată de noi ia în considerație toate patrulaterele convexe, simetrice în raport cu o diagonală a lor.

G.18. *Fiind date două poligoane regulate, unul cu* n *laturi, celălalt cu* $n+1$ *laturi, înscrise într-un același cerc de centru* O, *să se arate că:*

1) *există cel puțin o latură* [PQ] *a primului poligon al cărui arc pe care îl subîntinde cuprinde două vîrfuri* R *și* S *ale celui de-al doilea poligon;*

2) *măsurile unghiurilor* $\widehat{POR}$ *și* $\widehat{SOQ}$ *sînt mai mici decît* $\dfrac{2\pi}{n(n+1)}$.

Parabola vol. 17, nr. 2, p. 34, 1981

Soluție: Vîrfurile celor două poligoane regulate înscrise în același cerc de centru O nu pot coincide toate. Dacă două vîrfuri coincid, următoarele nu mai pot coincide, avînd în vedere că arcele subîntinse de laturile lor au măsurile $\dfrac{2\pi}{n}$, respectiv $\dfrac{2\pi}{n+1}$ radiani. De asemenea, este imposibil să existe o latură a primului poligon care să subîntindă un arc pe care să nu existe nici un vîrf al celui de al doilea, fiindcă atunci ar exista o latură a celui de al doilea

poligon care ar subîntinde un arc mai mare decît $\frac{2\pi}{n}$, ceea ce este imposibil, fiindcă $\frac{2\pi}{n+1} < \frac{2\pi}{n}$.

Prin urmare, pe fiecare arc în care primul poligon împarte cercul O, există cel puțin cîte un vîrf al celui de al doilea. Cum însă acesta are $n+1$ vîrfuri, va exista cel puțin unul dintre aceste arce $\overset{\frown}{PQ}$, care va conține două vîrfuri R și S ale celui de al doilea poligon.

2) Fie P, R, S, Q ordinea vîrfurilor pe arcul $\overset{\frown}{PQ}$. Între unghiurile la centru corespunzătoare va avea loc relația:

$$m(\widehat{POQ}) = \frac{2\pi}{n} = m(\widehat{POR}) + m(\widehat{ROS}) + m(\widehat{SOQ})$$

și, cum $m(\widehat{ROS}) = \frac{2\pi}{n+1}$, vom putea scrie:

$$m(\widehat{POR}) = \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n+1} - m(\widehat{SOQ}) = \frac{2\pi}{n(n+1)} - m(\widehat{SOQ}) < \frac{2\pi}{n(n+1)}.$$

Permutînd $\widehat{POR}$ cu $\widehat{SOQ}$, avem și:

$$m(\widehat{SOQ}) = \frac{2\pi}{n(n+1)} - m(\widehat{POR}) < \frac{2\pi}{n(n+1)}.$$

Comentarii: Formularea problemei în revista *Parabola* nu conține decît punctul 2 cerîndu-se să se arate că este posibil să se aleagă un vîrf P al primului poligon și un vîrf R al celui de al doilea, astfel încît $m(\widehat{POR}) < \frac{2\pi}{n(n+1)}$. Primul punct este mai delicat, nu este demonstrat ci afirmat în cadrul soluției astfel: Vîrfurile n-gonului împart cercul în n arce egale, pe care sînt situate cele $n+1$ vîrfuri ale $(n+1)$-gonului.

Deci, unul dintre arce, $\overset{\frown}{PQ}$, trebuie să conțină două vîrfuri R și S ale $(n+1)$-gonului. De ce? Nu se demonstrează, iar afirmația că pe aceste arce sînt situate cele $n+1$ vîrfuri este cam sumară.

G.19. ***Produsul a două laturi ale unui triunghi*** PQR ***este egal cu produsul dintre înălțimea vîrfului comun lor și diametrul cercului circumscris triunghiului.***

(G.S. Bhalla) Ontario Sec. Sch. Math. Bull. Vol. 20, nr. 2, p. 13/1984

Soluție: Fie $q = PR$ și $r = PQ$, S piciorul înălțimii din P pe QR și T capătul diametrului din P.

Sînt două cazuri de studiat: triunghiul PQR este ascuțitunghic și atunci toate picioarele înălțimilor sînt pe laturile sale, sau triunghiul PQR este obtuzunghic și atunci ortocentrul său este în afară, picioarele înălțimilor duse din vîrfurile unghiurilor ascuțite fiind pe prelungirile laturilor opuse.

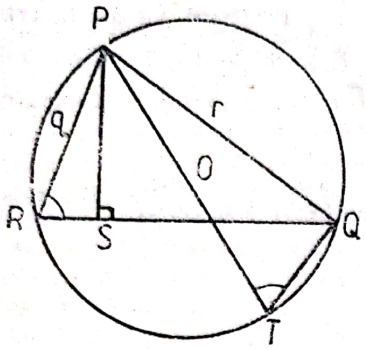
Cazul I. Triunghiurile dreptunghice PQT și PSR sînt asemenea deoarece unghiurile din R și T sînt congruente ca avînd aceeași măsură (fig. a). Vom avea:

$$\frac{PQ}{PS} = \frac{PT}{PR}, \text{ de unde } \frac{r}{PS} = \frac{PT}{q}$$

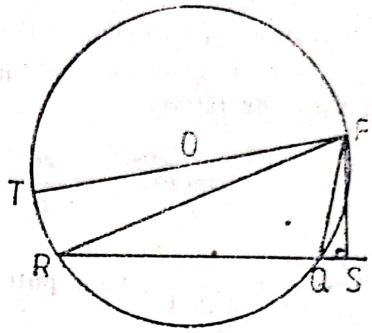
deci $qr = PS \cdot PT$.

Cazul II: (fig. b). Considerăm vîrful P în care unghiul este ascuțit; piciorul S al înălțimii din P va cădea pe prelungirea lui $|RQ|$. Triunghiurile dreptunghice PQT și PSR vor fi tot asemenea, unghiurile din T și R având aceeași măsură, arcul $\overset{\frown}{PQ}$.

Restul demonstrației rămîne aceeași, ca și concluzia. Nu luăm în considerație alte situații, deoarece acestea revin la cazurile anterioare.



(a)



(b)

Comentarii: Problema face parte dintr-un articol intitulat „*Teorema lui* BRAHMAGUPTA. *Un mărgăritar al geometriei hinduse*" semnat de Dr. *G.S.* BHALLA. Rezultatul respectiv servește pentru demonstrarea acestei teoreme care privește patrulaterele inscriptibile.

Autorul nu face distincție între triunghiurile ascuțitunghice și obtuzunghice, deși ambele cazuri trebuie examinate separat din cauza diferenței între pozițiile picioarelor înălțimilor duse din P în cele două cazuri. Proprietatea metrică se menține însă.

G.20. *Teorema lui* BRAHMAGUPTA. *Notînd cu* a, b, c, d *lungimile laturilor patrulaterului inscriptibil* ABCD *și cu* m, n *lungimile diagonalelor acestuia, au loc formulele:*

$$m^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}, \quad n^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

C. S. Bhalla, Ontario Sch. Math. Bull., vol. 20, p. 14, nr. 2/1984

Soluție: Explicitînd notațiile (conform figurii), vom pune:

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = m, \quad BD = n.$$

Ducînd din cele patru vîrfuri perpendiculare pe diagonale, respectiv $BD \perp AL$, $BM \perp AC$, $CN \perp BD$ și $DP \perp AC$ și notînd cu k lungimea diametrului cercului circumscris patrulaterului inscriptibil $ABCD$, vom aplica rezultatul cunoscut de la problema G.19.

Vom observa că picioarele M, N, P, L sînt pe segmentele formate de cele două diagonale, în triunghiurile obtuzunghice formate de laturi cu diagonalele, înălțimile respective corespunzînd vîrfurilor unghiurilor obtuze.

În triunghiurile ABC, BCD, CDA și respectiv DAB, vom avea relațiile:

$$ab = k \cdot BM, \quad bc = k \cdot CN, \quad cd = k \cdot DP, \quad da = k \cdot AL$$

astfel încît, prin adunare membru cu membru obținem:

$$ad + bc = k(AL + CN)$$

$$ab + cd = k(BM + DP)$$

Scanned with OKEN Scanner

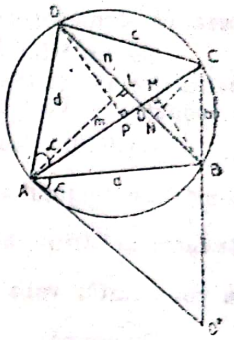
și împărțind membru cu membru :

$$\frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{AL + CN}{BM + DP}, \qquad (1).$$

Fie O punctul de intersecție al diagonalelor. Triunghiurile dreptunghice AOL și CON fiind asemenea, din rapoartele egale

$$\frac{AL}{CN} = \frac{AO}{CO}$$

deducem :



$$\frac{AL + CN}{CN} = \frac{AO + OC}{CO} = \frac{m}{OC}, \qquad (2)$$

și prin urmare

$$AL + CN = m\,\frac{CN}{OC}, \qquad (3).$$

Din triunghiurile dreptunghice asemenea DOP și BOM deducem relația similară :

$$BM + DP = n \cdot \frac{BM}{OB}, \qquad (4)$$

iar din (3) și (4) :

$$\frac{AL + CN}{BM + DP} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\dfrac{CN}{OC}}{\dfrac{BM}{OB}}, \qquad (5).$$

Cum unghiurile din M și N sînt drepte, patrulaterul $BCMN$ este inscriptibil, unghiurile $\widehat{OBM}$ și $\widehat{ONC}$ avînd aceeași măsură (arcul $\overset{\frown}{MN}$), vor fi congruente și triunghiurile dreptunghice BCN și BOM vor fi asemenea, de unde :

$$\frac{CN}{BM} = \frac{CO}{BO} \quad \text{și} \quad \frac{CN}{CO} = \frac{BM}{BO}, \qquad (6).$$

Egalitatea rapoartelor (6), face ca din (5) să rezulte :

$$\frac{AL + CN}{BM + DP} = \frac{m}{n}, \qquad (7).$$

Teorema lui Ptolemeu, aplicată patrulaterului inscriptibil $ABCD$, ne va da : $ac + bd = mn$, astfel încît din relațiile (1) și (7) vom avea succesiv :

$$\frac{ad + bc}{ab + cd} = \frac{m}{n} \;|\; \frac{ad + bc}{ab + cd}\,(ac + bd) = \frac{m}{n}\,mn = m^2,$$

adică prima relație din enunț.

Folosind în mod asemănător triunghiurile asemenea DOP și BOM și patrulaterul inscriptibil $ABLM$, obținem și cea de a doua relație:

$$n^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc},$$

ceea ce demonstrează teorema lui BRAHMAGUPTA.

Comentarii: În demonstrație s-a folosit teorema lui PTOLEMEU, potrivit căreia *într-un patrulater inscriptibil convex $ABCD$ suma produselor laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor:* $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

Pe figura teoremei lui BRAHMAGUPTA se poate da și demonstrația acestei teoreme. Să construim unghiul $\alpha = m(\widehat{BAO'}) = m(\widehat{CAD})$, O' fiind pe prelungirea lui $|BC|$. Se formează triunghiurile asemenea $AO'B$ și CAD, fiindcă $m(\widehat{O'BA}) = \pi - m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{ADC})$, în consecință, vom avea și $m(\widehat{AO'B}) = m(\widehat{ACD})$.

De asemenea, triunghiurile $O'AC$ și ABD vor fi asemenea, fiindcă $m(\widehat{AO'B}) = m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ABD})$ și $m(\widehat{O'AC}) = m(\widehat{BAD})$. Scriem rapoartele egale:

$$\frac{O'B}{CD} = \frac{AB}{AD} \text{ și } \frac{AC}{AD} = \frac{O'C}{BD},$$

din care deducem

$$AC \cdot BD = AD \cdot O'C = AD(O'B + BC) = AD \cdot BC + AD \cdot O'B.$$

Însă, din primele rapoarte egale, avem $O'B \cdot AD = AB \cdot CD$ și, înlocuind în egalitățile precedente, obținem:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

adică relația lui PTOLEMEU.

BRAHMAGUPTA a trăit în secolul VI î.e.n (598 î.e.n). El este unul din șirul de matematicieni indieni care începe în timpul „*Vedelor*", cînd s-au pus bazele geometriei hinduse. Cel mai vechi manual de geometrie vedică a fost *Sulvasantras* (800 î.e.n) și conține reguli de construcție și de transformări de figuri rectiliniare folosite de hinduși în construcția altarelor vedice.

BRAHMAGUPTA este cel care realizează un salt calitativ remarcabil ilustrat între altele prin teorema care îi poartă numele.

G.21. *Un pătrat* A *este tăiat în două patrulatere* A_1, A_2 *prin fiecare dreaptă dintr-un număr de drepte* D_i *în așa fel încît aria unuia dintre aceste patrulatere să fie dublul ariei celuilalt:* $\mathcal{A}_{A_1} = 2\mathcal{A}_{A_2}$.

1) *Care este numărul minim de drepte* D_i *de intersecție, astfel încît să existe cel puțin un punct* P *prin care să treacă cel puțin 3 dintre aceste drepte?*

2) *Cîte puncte de astfel de concurență există în pătratul* A *și ce poligon convex le poate avea ca vîrfuri?*

3) *Să se calculeze aria acestui poligon în funcție de latura l a pătratului* A.

N.T/Parabola, vol. 20, nr. 2, p. 20/1984

Soluție: 1) Fie D_i una din dreptele de intersecție. Fără a pierde din generalități, putem s-o considerăm că intersectează baza superioară $[CD]$ și cea inferioară $[AB]$ în C', respectiv A'. Să notăm segmentele determinate de D_i, pe AB, respectiv CD astfel:

$$AA' = a,\ A'B = b,\ C'C = c,\ DC' = d, \text{ și mijlocul lui } [A'C'] \text{ cu } P_i.$$

Să evaluăm ariile $\mathscr{A}_{A_1}$ și $\mathscr{A}_{A_2}$.

Trapezul dreptunghic $AA'C'D$ se descompune într-un dreptunghi și un triunghi dreptunghic (a se vedea figura). Vom avea:

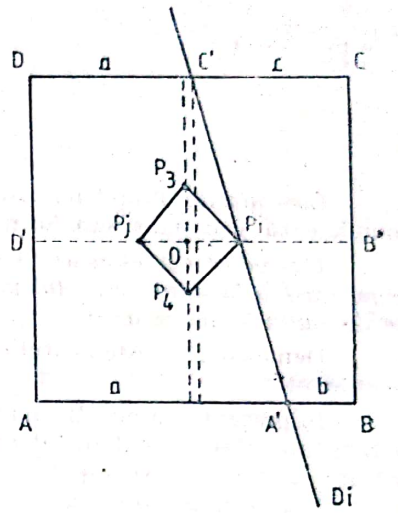
$$\mathscr{A}_{AA'C'D} = dl + \frac{a-d}{2}\,l = \frac{a+d}{2}\,l = \mathscr{A}_{A_1}.$$

În mod analog:

$$\mathscr{A}_{A'BCC'} = \frac{b+c}{2}\,l = \mathscr{A}_{A_2}.$$

Impunînd condiția $2\mathscr{A}_{A_2} = \mathscr{A}_{A_1}$, obținem condiția:

$$\frac{a+d}{2} = 2\cdot\frac{b+c}{2}, \qquad (1).$$



Dacă P_i este mijlocul lui $[A'C']$ și paralela la AB prin P_i taie pe BC în B' și pe AD în D', vom avea, fiindcă $[P_iD']$ este linie mediană în trapezul $AA'C'D$ și $[P_iB']$ linie mediană în trapezul $A'BCC'$:

$$D'P_i = \frac{a+d}{2},\quad P_iB' = \frac{b+c}{2}$$

și din (1)

$$D'P_i = 2\cdot P_iB', \qquad (2).$$

Cu alte cuvinte P_i se găsește pe linia mediană $[B'D']$ a pătratului și o împarte în raportul $\frac{1}{3}$. Prin urmare, D_i trece printr-un punct fix P_i.

Pe dreapta mediană $B'D'$ mai există un al doilea punct P_j care o împarte în același raport și vom avea:

$$D'P_i - P_jP_i = P_iB'.$$

Dar dreapta D_i putea intersecta cealaltă pereche de laturi opuse paralele ale pătratului, deci mai există încă alte două puncte P_h, P_k pe cealaltă mediană a pătratului.

În consecință, există patru puncte P_1, P_2, P_3, P_4 situate pe cele două linii mediane ale pătratului și nu mai există altele fiindcă acestea împart liniile mediane în raportul 1/3 și deci nu pot fi decît punctele P_i, P_j sau P_h, P_k.

Pentru a determina numărul minim de drepte D_i vom aplica *principiul cutiei*, al lui Dirichlet. Dacă prin fiecare dintre punctele P_1, P_2, P_3, P_4 trec mai puțin de 3 drepte D_i, numărul acestor drepte va fi maximum 8. Dacă 8 este depășit, cel puțin printr-un punct vor trece mai multe drepte. Pentru ca măcar printr-unul din puncte să treacă cel puțin 3 drepte, numărul minim al acestora este 9.

2) Există, după cum am arătat, 4 puncte, P_1, P_2, P_3, P_4 și numai 4. Cum P_1 și P_2 sînt simetrice pe $B'D'$ în raport cu centrul O al pătratului, iar P_3 și P_4 de asemenea pe cealaltă mediană, figura $P_1P_2P_3P_4$ avînd diagonalele perpendiculare și egale $P_1P_2 = \frac{l}{3}$, $P_3P_4 = \frac{l}{3}$, va fi un pătrat, deci poligon convex.

3) Cum $P_1P_4^2 = OP_1^2 + OP_4^2 = \left(\frac{l}{6}\right)^2 + \left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{l^2}{18}$, latura acestui pătrat va fi $\frac{l}{3\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{6}$, iar aria sa:

$$\mathcal{A}_{P_1P_2P_3P_4} = \frac{l^2}{18}.$$

Comentarii: Problema este sugerată de problema următoare pe care enunțul nostru o completează și o pune sub formă deosebită:

Un pătrat este tăiat de fiecare dintre 9 linii (drepte), care determină cîte două patrulatere astfel încît aria unuia este dublul ariei celuilalt. Să se arate că există un punct care se găsește pe cel puțin 3 dintre aceste drepte.

Demonstrația este destul de succintă, fără explicații suficiente, cele 4 puncte apărînd surprinzător.

În prezentarea noastră punem în evidență substratul strategic al demonstrației, care este celebrul principiu al cutiei, introdus de DIRICHLET și care se poate enunța sugestiv în felul următor: *avem n cutii și n + 1 obiecte pe care trebuie să le punem în aceste cutii; în aceste condiții cel puțin una dintre cutii va conține mai mult decît un obiect sau cel puțin două obiecte.*

Desigur modelul poate fi variat. În cazul problemei noastre, cutiile sînt cele 4 puncte P_1, P_2, P_3, P_4 și obiectele un număr de drepte care trec prin aceste puncte. Dorim să dovedim că cel puțin prin unul din puncte vor trece cel puțin 3 drepte.

Cum nu știm nimic despre punctele prin care trec dreptele D_i, ne vom situa în condițiile cele mai defavorabile: dacă avem mai puține drepte decît puncte se poate ca numai cel mult cîte o dreaptă să treacă prin unul din aceste puncte. Nu se poate spune deci nimic. Dacă facem ca prin fiecare punct să treacă două drepte, avem 8 drepte în total. Dacă vor fi mai multe, atunci sigur că măcar printr-unul din puncte vor trece cel puțin 3 drepte. Este clar atunci că minimul de drepte este 9 și că există cel puțin un punct prin care trec cel puțin 3 drepte. Menționăm că problema se poate generaliza la un trapez, pe baza unui raționament similar celui pe care l-am folosit pentru pătrat.

G.22. *Să se rezolve ecuația*

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x,$$

cu x în radiani și $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, stabilindu-se domeniul de definiție al ecuației în acest interval.

Ontario Sec. Sch. Math. Bull, vol. 19, nr. 3/1983

Soluție: Exprimînd tangenta în funcție de sinus și cosinus, vom avea succesiv:

$$\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)(1 + 2\sin x \cos x) = 1 + \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ (cu } \cos x \neq 0),$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x) = (\sin x + \cos x),$$

$$(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = (\sin x + \cos x),$$

din care deducem:

$$\sin x + \cos x = 0 \text{ și } (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x) = 1 \text{ sau}$$

$$\sin x + \cos x = 0 \text{ și } \cos^2 x - \sin^2 x = 1, \text{ echivalent cu } \cos 2x = 1, \quad (1).$$

Domeniul de definiție al ecuației trebuie să excludă $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = \frac{3\pi}{2}$, deci va fi

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right],$$

iar din (1) deducem:

$$\cos 2x = 1 \text{ și } \operatorname{tg} x = -1, \tag{1'}$$

ale căror soluții în domeniul de definiție vor fi:

$$x = 0 \text{ sau } x = 2\pi \text{ și } x = \frac{3\pi}{4} \text{ sau } x = \frac{7\pi}{4}. \tag{2}$$

Comentarii: În revistă nu se face nici o mențione relativ la domeniul de definiție în intervalul $[0, 2\pi]$, care este dat ca atare ca domeniu de definiție al lui x.

Evident, dacă se extinde acest domeniu prin periodicitate, există o infinitate de soluții, care se deduc din (2), adăugînd $2k\pi$.

G.23. 1) *Să se determine numărul de vîrfuri ale unui poligon cu* k *diagonale.*

2) *Să se găsească expresia generală a lui* k *pentru care există poligoane cu* n *laturi avînd* k *diagonale.*

N. T, Parabola vol. 20, nr. 2/1930

Soluția I. Fie n numărul de vîrfuri ale poligonului considerat. Din fiecare vîrf pleacă $n-3$ diagonale, fiindcă trebuiesc excluse vîrful considerat și cele două vîrfuri adiacente. Cum însă fiecare diagonală leagă două vîrfuri, aceasta intră de două ori în calcul, deci va trebui să luăm jumătate din numărul $n(n-3)$, pentru a avea pe cel al diagonalelor. Ecuația problemei va fi:

$$\frac{n(n-3)}{2} = k$$

sau

$$n^2 - 3n - 2k = 0 \tag{1}.$$

Soluțiile vor fi:

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8k}}{2}, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{1'}$$

cu condiția ca $9 + 8k = p^2$ și $p \in \mathbf{N}$.

Cum $n_{1,2}$ sînt numere naturale, va trebui să avem:

$$p = 2q + 3, \; q \in \mathbf{N}.$$

2) Pentru a găsi expresia lui k, va trebui să rezolvăm ecuația diofantică:

$$9 + 8k = p^2, \text{ echivalentă cu } p^2 - 9 = 8k, \tag{2}$$

de unde

$$8k = (p - 3)(p + 3), \tag{2'}.$$

Ambii factori avînd aceeași paritate, dacă unul este multiplu de 2 și celălalt va avea aceeași proprietate.

Putem deci lua:

$$p - 3 = 2q, \text{ deci } p + 3 = 2q + 6, \text{ de unde } 8k = 4q(q + 3),$$

adică $2k = q(q + 3)$ și unul din cei doi factori va trebui să fie multiplu de 2. Vom avea două cazuri:

I. $q = 2r$, $q \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N}$, de unde:

$$2k = 2r(2r + 3), \text{ deci } k = r(2r + 3), \text{ deci:}$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8r(2r + 3)}}{2} = \frac{3 \pm (4r + 3)}{2}.$$

În rezumat:

$$k = r(2r + 3); \quad n_1 = 2r + 3, \quad n_2 = -2r, \tag{3}$$

II. $q + 3 = 2s$, $q \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbf{N}$, de unde:

$$k = s(2s - 3) \text{ și}$$

$$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8s(2s - 3)}}{2} = \frac{3 \pm (4s - 3)}{2}.$$

În rezumat:

$$k = s(2s - 3), \; n_1 = 2s, \; n_2 = 3 - 2s, \tag{3'}$$

Luînd $p + 3 = 2q$, vom obține aceleași soluții (3) și (3') permutate între ele. Nu este însă lipsit de interes să punem în evidență cîteva cazuri particulare, după cum urmează:

I. Pentru poligoanele cu un număr impar de laturi:

a) $r = 0$, $k = 0$, $n_1 = 3$, $n_2 = 0$; triunghiul n-are diagonale;

b) $r = 1$, $k = 5$, $n_1 = 5$, $n_2 = -2$; pentagonul convex sau stelat are 5 diagonale și este ușor de verificat că fiecare dintre cele 2 pentagoane, convex și stelat, cu aceleași vîrfuri, este format din diagonalele celuilalt;

c) $r = 2$, $k = 14$, $n_1 = 7$, $n_2 = -4$; heptagonul convex sau stelat are 14 diagonale;

d) $r = 3$, $k = 27$, $n_1 = 9$, $n_2 = -6$; nonagonul convex sau stelat are 27 diagonale.

II. Pentru poligoanele cu un număr par de laturi:

a) $s = 0$, $k = 0$, $n_1 = 0$, $n_2 = 3$; triunghiul nu are diagonale, soluție obținută cu $n_2 = 3$, caz studiat la I a); pentru $n_1 = 0$ avem mulțimea vidă;

b) $s = 1$, $k = -1$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$; segmentul, ca și poligonul redus la un singur vîrf nu au diagonale, $k = -1$ fiind fără semnificație geometrică de tipul diagonală;

c) $s = 2$, $k = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = -1$; patrulaterul convex sau stelat are două diagonale;

d) $s = 3$, $k = 9$, $n_1 = 6$ $n_2 = -3$; hexagonul convex sau stelat are 9 diagonale;

e) $s = 4$, $k = 20$, $n_1 = 8$, $n_2 = -5$; octogonul convex sau stelat are 20 diagonale.

Soluția a II-a: 1) Ecuația problemei fiind (1) din soluția I, pentru k întreg, cum produsul $n(n-3)$ este totdeauna par, vom putea avea soluție pentru orice n natural.

Dacă $n = 2s$, vom obține

$$n = 2s \text{ și } k = s(2s-3) \tag{3}$$

care corespunde soluției (3').

Dacă $n = 2r + 3$, vom obține imediat:

$$n = 2r + 3 \text{ și } k = r(2r + 3) \tag{3'}$$

corespunzînd soluției (3).

2) Expresiile generale ale lui k pentru care există poligoane cu n laturi sînt date de:

$$k = s(2s - 3) \text{ şi } k = r(2r+3)$$

corespunzînd respectiv lui $n = 2s =$ par, $n = 2r + 3 =$ impar. Ceea ce nu rezolvă soluţia a II-a este întrebarea: *ce condiţii trebuie să îndeplinească un număr k natural dat, pentru a corespunde numărului de diagonale ale unui poligon cu n laturi?*

La această întrebare se va răspunde în cele ce urmează:

Comentarii: Problema extinde o problemă dată la *Concursul de matematică al elevilor din Australia, în 1984* (divizia juniori, corespunzînd gimnaziului nostru). Aceasta are următorul enunţ şi următoarea soluţie:

O diagonală a unui poligon este o linie (dreaptă!) care uneşte două vîrfuri neadiacente (ale poligonului!). Cîte vîrfuri are un poligon care are 152 diagonale?

Se aplică formula (1) pentru $k = 152$ şi se găseşte ecuaţia $n^2 - 3n - 304 = 0$, care se scrie sub forma $(n-19)(n+16) = 0$. Se păstrează soluţia $n = 19$, care revine la (3) cu $r = 8$ şi $k = 8 \cdot 19$, $n_1 = 19$, $n_2 = -16$.

Lăsînd la o parte impreciziunile din enunţ, pe care nu le vom găsi în manualele şi revistele noastre, soluţia se bazează pe descompunerea în factori a lui $k = 152 = 8 \cdot 19$, mai precis a lui $2k = 16 \cdot 19$, respectiv $-2k = -16 \cdot 19$ pentru care $n^2 - 3n - 304 = n^2 - 3n - 16 \cdot 19$ de unde $(-16) + 19 = -3$, şi deci, $n^2 - 3n - 16 \cdot 19 = n^2 - (-16 + 19)n + (-16)(19) = (n + 16)(n-19) = 0$.

Este evident că această metodologie nu poate fi extinsă la cazul general pentru un k natural dat.

Soluţiile noastre, ca şi formularea problemei, urmăresc în mod deliberat o metodologie de rezolvare a cazului general, indispensabil ca problematică.

Soluţia I este mai lungă dar explorează mai adînc conţinutul aritmetico-geometric al problemei, fiindcă ne spune pentru un k dat, fără a folosi descompuneri ingenioase în factori dacă putem spera sau nu la o soluţie. Condiţia este: $9 + 8k =$ pătrat perfect $= (2p+1)^2$, ceea ce nu apare în soluţia a II-a, mai scurtă, dar care nu rezolvă complet ecuaţia diofantică $n^2 - 3n - 2k = 0$.

G.24. *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

şi domeniul de definiţie al relaţiei.

Parabola, vol. 20, nr. 2/1984

Soluţia I. Întrucît $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ se exprimă raţional prin $\sin\frac{\theta}{2}$ şi $\cos\frac{\theta}{2}$, iar $\sin\theta$, $\cos\theta$ se exprimă raţional prin $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, putem alege una sau cealaltă cale de verificare a identităţii.

Vom alege a doua cale, căutînd să aducem primul membru al relaţiei din enunţ la forme cît mai simple. Înmulţind atît numărătorul cît şi numitorul cu $1 + \sin\theta + \cos\theta \neq 0$, vom avea:

$$\frac{(1+\sin\theta)^2 - \cos^2\theta}{(1+\sin\theta+\cos\theta)^2} = \frac{1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta - \cos^2\theta}{1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta + \cos^2\theta + 2(1+\sin\theta)\cos\theta} =$$

$$= \frac{2\sin\theta(1+\sin\theta)}{2(1+\sin\theta)(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

și identitatea este verificată, dar va trebui să excludem valorile lui 0 care anulează numitorul, deci cele pentru care

$$1 + \sin 0 = 0 \quad \text{sau} \quad 1 + \cos 0 = 0, \text{ deci :}$$

$$\sin 0 = -1, \text{ de unde } 0 = \frac{(-1)^{k+1}\pi}{2} + k\pi, \tag{1}$$

$$\cos 0 = -1, \text{ de unde } 0 = \pi + 2k\pi, \tag{1'}$$

unde k este întreg.

Cum $\operatorname{tg} \frac{0}{2} = \frac{\sin \frac{0}{2}}{\cos \frac{0}{2}}$, va trebui să eliminăm și valorile lui 0 pentru care $\cos \frac{0}{2} = 0$, deci $0 = \pi + 2k\pi$, care sînt cuprinse în (1').

Prin urmare, domeniul de definiție al identității este :

$$(-\infty, +\infty) \setminus \left[\left\{ \frac{(-1)^{k+1}\pi}{2} + k\pi \right\} \cup \{(2k+1)\pi\} \right] \tag{2}$$

Soluția a II-a. Se știe că $\sin 0$, $\cos 0$ se exprimă rațional în funcție de $\operatorname{tg} \frac{0}{2}$ și anume :

$$\sin 0 = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{0}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{0}{2}}, \quad \cos 0 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{0}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{0}{2}}.$$

Să notăm $\operatorname{tg} \frac{0}{2} = t$ și să introducem expresiile respective în primul membru al relație propuse. Vom avea :

$$\frac{1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1 + t^2 + 2t - 1 + t^2}{1 + t^2 + 2t + 1 - t^2} = \frac{2t^2 + 2t}{2t + 2} = t$$

și astfel identitatea este stabilită, domeniul ei de definiție fiind stabilit în soluția I prin expresia (2).

Comentarii: Problema este formulată în *Parabola* fără cerința esențială de a i se stabili domeniul de existență, ceea ce în învățămîntul nostru nu mai este admisibil. De asemenea, nu este dată decît soluția a II-a cu indicații succinte și formule, fără a se atrage atenția că ambii membri pot să nu aibă sens pentru anumite valori ale lui 0, respectiv cele cuprinse în (1) și (1').

Scanned with OKEN Scanner

Soluția a II-a este bazată pe o reprezentare rațională a lui $\sin\theta$ și $\cos\theta$, în funcție de $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, foarte des folosită, dar oarecum artificioasă, deci recomandabilă. Aceasta algebrizează problema și conduce la o identitate algebrică. Autorul ei nu observă însă nici după substituție că trebuie să se elimine $t=-1$, ca și $t=\pm\infty$, adică $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=-1$ care implică $\theta=\frac{(-1)^{k+1}\pi}{2}+k\pi$ și $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\pm\infty$, care implică $\theta=\pi+2k\pi$, adică tocmai valorile excepționale (1) și (1').

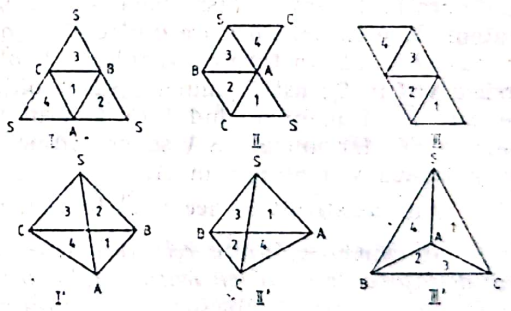
Soluția I dată de noi este și ea artificioasă, întrucît folosește înmulțirea numărătorului din primul membru cu $1+\sin\theta+\cos\theta\neq 0$. Dar tocmai prin aceasta atrage atenția asupra unei restricții esențiale. S-ar putea obiecta că prin această înmulțire s-ar introduce o soluție artificială, dar obiecția nu este valabilă fiindcă anularea lui $(1+\sin\theta+\cos\theta)^2$ este echivalentă cu rezolvarea ecuației $1+\sin\theta+\cos\theta=0$ și conduce la aceleași soluții.

G.25. 1) *În cîte moduri pot fi alipite patru triunghiuri echilaterale astfel încît să aibă laturi comune?*

2) *Din care dintre aceste rețele de triunghiuri echilaterale se poate face o piramidă cu patru fețe echilaterale și care dintre fețe poate fi aleasă ca bază prin rotația triunghiurilor în jurul laturilor comune, fără rupere?*

N.T/Sch. Math. Prof. Book 1, p. 114/1969

Soluție: 1) În primul rînd, două dintre cele patru triunghiuri numerotate 1, 2, 3, 4 nu pot avea mai mult de o latură comună. Dacă ar avea cîte două laturi comune ar coincide. Pentru a construi configurațiile posibile, să luăm în considerație triunghiul 1, de exemplu; putem să-i alipim toate cele 3 triunghiuri formînd configurația I, cu cîte o latură adiacentă la laturile lui 1. Astfel, configurația celor patru triunghiuri are în comun trei laturi în total.



Să observăm că *în această configurație nu se poate ca toate cele patru triunghiuri să nu aibă decît cîte o latură comună cu celelalte.* Într-adevăr, dacă triunghiului 1 îi alipim pe o latură triunghiul 2, alipirea triunghiului 3 nu se poate face decît unuia din aceste două; astfel, unul dintre ele va avea cu 3 o latură comună și, prin urmare, în total va avea doar laturi comune cu celelalte, două în total.

A doua observație de ordin topologic este că în configurație nu pot fi, în total, decît trei laturi comune celor patru triunghiuri. Într-adevăr, întrucît există cel puțin unul dintretri unghiuri care are două laturi comune cu celelalte, configurația în care intră acesta este formată din trei triunghiuri (el și două adiacente). Cum nu sînt decît patru triunghiuri, ultimul mai poate fi adiacent tot la cel cu două laturi comune cu celelalte și atunci avem configurația I, în care 1 are toate laturile comune cu celelalte 3 sau este adiacent la unul din celelalte două și mai are cu ele o singură latură comună.

Astfel: *configurația a patru triunghiuri echilaterale adiacente are un invariant: numărul laturilor comune este trei.*

Așa fiind, vom putea organiza configurația II pornind de la 1, căruia îi alipim 2, acestuia 3 și în continuare 4. Astfel, 2 și 3 au două laturi comune cu celelalte, iar 1 și 4 cîte o latură.

Configurația III se deduce din II, alipind triunghiul 4 celeilalte laturi a lui 3.

Este ușor de văzut că *alte configurații nu mai sînt posibile,* fiindcă laturi comune date unui triunghi nu pot fi decît trei și avem configurația I, două și în acest caz trei dintre triunghiuri sînt plasate iar cel de al patrulea poate fi alipit primului, adică 1, sau ultimului, adică 3 și anume în două moduri, de unde configurațiile II sau III.

Scanned with OKEN Scanner

Cazul unei singure laturi comune nu poate cuprinde decît două triunghiuri; dacă ar fi unul singur, celelalte două laturi comune ale invariantului trei nu ar fi suficiente pentru a plasa încă trei triunghiuri; dacă ar fi trei triunghiuri cu cîte o singură latură comună cel de-al patrulea nu ar mai avea loc în configurație.

În aceste condiții, dacă două triunghiuri 1 și 2 au numai cîte o latură comună în configurație, celelalte două 3 și 4 trebuie să aibă ele însele o latură comună și apoi să se alipească în configurație. Dar, în prezent, două dintre laturile comune ale invariantului sînt plasate, deci mai rămîne una singură, care va trebui să fie comună configurației 1, 2 și celelalte 3, 4. Am revenit la două triunghiuri cu cîte o latură comună și celelalte două cu cîte două laturi comune, respectiv 1 și 4 cu o latură comună și 2 și 3 cu cîte două laturi. Cazul cînd alipirea s-ar face la 1 este, topologic vorbind, același.

2) Pentru a distinge cazurile în care din rețeaua respectivă de triunghiuri echilaterale se poate face un tetraedru regulat (piramidă cu patru fețe triunghiuri echilaterale) prin rotații în jurul laturilor comune și fără rupere, trebuie în primul rînd să observăm că prin fiecare vîrf al unui tetraedru trec trei fețe și prin fiecare muchie a sa, două fețe. În consecință, în desfășurata tetraedrului printr-un vîrf nu pot trece decît cel mult trei triunghiuri și avem un al doilea invariant topologic al configurației a patru triunghiuri echilaterale adiacente.

Astfel: *configurația a patru triunghiuri adiacente care este rabaterea unui tetraedru regulat prin tăieturi și fără rupere nu poate avea vîrfuri comune decît la cel mult 3 triunghiuri.*

În aceste condiții, *configurația II, unde A este vîrf comun la patru triunghiuri, nu poate fi desfășurată prin rabatere a unui tetraedru regulat.*

Figura II' confirmă această imposibilitate, fiindcă fața SBC nu are corespondent în rabatere.

Configurația I satisface condiția ca în orice vîrf să treacă cel mult trei triunghiuri, în particular trec cîte trei triunghiuri prin vîrfurile ABC ale feței 1. Prin rotație în jurul laturilor AB, BC și CA, fețele 2, 3, 4 se pot reuni în vîrful S pentru a se constitui tetraedrul regulat $SABC$, conform cu proprietățile de bază ale tetraedrului regulat.

Configurația III satisface, de asemenea, condiția că prin orice vîrf ar trece cel mult trei fețe. Ca bază vom alege una din fețele prin vîrfurile cărcia trec cel mult trei fețe. Nu există nici o față prin ale cărei trei vîrfuri să treacă trei fețe, fiindcă această proprietate caracterizează configurația I. Există însă două fețe, 2 și 3, prin ale căror vîrfuri B și C trec cîte trei fețe. Putem alege ca bază oricare dintre ele. Vom alege pe 3 și vom urmări rotațiile: 4 rotindu-se în jurul lui AB va furniza vîrful S; 2 rotindu-se în jurul lui BC va trebui să ajungă cu al treilea vîrf în S; astfel, muchia SB se obține din fețele 2 și 3. Mai rămîn muchiile SA și SC pe care le obținem ducînd fața 1, prin rotație în jurul lui BC a feței 2 în S, ceea ce dă muchia SC, iar muchia SA se va obține rotind fața 1, astfel așezată, în jurul lui SC pînă ce al treilea vîrf ajunge în A.

Am constituit în acest fel tetraedrul regulat $SABC$ din figura III'.

În concluzie, *dintre cele trei rețele de triunghiuri echilaterale adiacente, prima și a treia sînt desfășurările unui tetraedru regulat prin tăieturi pe muchii și fără ruperi de fețe.*

Comentarii: Problema este inspirată de o întrebare de curs din manualul *School Math. Prof. Book 1*, pusă sub forma următoare:

În cîte moduri pot fi unite patru triunghiuri echilaterale latură cu latură? Cîte dintre acestea formează rețeaua unei piramide cu patru fețe triunghiulare echilaterale? Care dintre fețe este baza?

Răspunsul este dat în *Ghidul profesorului* pentru acest manual la p. 88 sub forma a trei figuri și declarația că sînt trei moduri (cele desenate). La celelalte întrebări răspunsul este: „figurile T (i) și (iii) sînt rețele pentru tetraedru regulat."

Desigur că această tratare satisface intuiția și dă indicații pentru construcția rețelelor și a tetraedrelor regulate compatibile cu acestea, dar atît. Nu se dă nici o explicație și cu atît mai puțin o demonstrație.

Formularea noastră corespunde unei probleme și cere o rezolvare matematică, pe care o dăm în cele ce precedă. Soluția găsită de noi analizează configurațiile posibile din punct de vedere topologic și pune în evidență doi invarianți care caracterizează aceste configurații și relațiile lor cu tetraedrul regulat din care provin și pe care trebuie să-l reconstituie.

La prima vedere problema pare un joc și este prezentată în manualul britanic ca atare, dar în realitate ea cere o demonstrație matematică delicată, deși nu de nivel înalt. Faptul că

Scanned with OKEN Scanner

cea de a doua configurație nu corespunde reconstituirii unui tetraedru regulat nu ar putea căpăta justificare fără o astfel de demonstrație.

Problema se poate generaliza mult: prima etapă ar fi la configurații de triunghiuri oarecare și la reconstituirea unui tetraedru desfășurat și aplicat pe plan fără rupturi.

G.26. 1) *Într-un triunghi oarecare* ABC, *în care notăm lungimile laturilor cu* a, b, c *să se stabilească inegalitatea:*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0; \tag{1}$$

2) *Să se caracterizeze triunghiurile pentru care* (1) *devine egalitate.*

Olimpiada internațională de matematică, Paris, 1983

Soluție. *(B.* SCHMUTZLER, *R.D.G.)*

1) Aplicînd inegalitatea triunghiulară vom scrie, pe rînd:

$$a + b - c > 0,\ b + c - a > 0,\ c + a - b > 0, \tag{2}$$

fiindcă triunghiul este presupus *nedegenerat*. Cum, pe de altă parte:

$$(a-b)^2 \geqslant 0,\ (b-c)^2 \geqslant 0,\ (c-a)^2 \geqslant 0 \tag{2'}$$

din (2) și (2') deducem:

$$\lambda \equiv (a+b-c)(c+a-b)(c-a)^2 = a^4 - c^4 + 2a^2bc + 2ab^2c - 4abc^2 + \\ + 2ac^3 + 2bc^3 - 2a^3c - 2b^2c^2 - a^2b^2 \geqslant 0 \tag{3}$$

Permutînd circular și adunînd membru cu membru cele 3 inegalități astfel obținute, notate λ, μ, ν, vom avea:

$$2a^3b + 2b^3c + 2ac^3 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 \geqslant 0$$

și, după simplificare și stringere în factori, vom ajunge la forma inegalității din enunț.

2) Întrucît inegalitatea (1) din enunț este suma inegalităților λ, μ, ν, mai corect:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \equiv 2(\lambda + \mu + \nu) \geqslant 0 \tag{3'}$$

și cum $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, pentru orice a, b, c satisfăcînd inegalitățile triunghiulare (2), vom avea $\lambda + \mu + \nu = 0$ dacă și numai dacă $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$. Dar, în virtutea lui (2), $\lambda = 0$ implică $(c-a)^2 = 0$ deci $c = a$ și, în consecință, vom avea egalitate dacă și numai dacă $a = b = c$, deci dacă triunghiul ABC este echilateral.

Comentarii: Problema este menționată în revista *Alpha*, vol. 18, nr. 1, 1984, cu soluția lui B. SCHMUTZLER, avînd enunțul algebrizat, așa cum a fost dat la Olimpiadă. Formularea, ca și soluția noastră sînt puțin modificate și precizate fiindcă, de exemplu, egalitatea este justificată astfel: „Fiindcă inegalitatea într-una din inegalitățile (3) implică (influențează) inegalitatea (3'), rebuie ca egalitatea din (3') să conducă, de asemenea, la egalitate în (3)"

Această justificare este oarecum deficitară fiindcă nu inegalitatea *dintr-una* din inegalitățile (3) implică (1), ci suma lor cel puțin egală cu 0 aduce această consecință, iar egalitatea în (3') va implica nu $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, ci $\lambda + \mu + \nu = 0$, care nu se poate realiza decît prin $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, din cauză că primii membri sînt pozitivi, iar finalul este implicat de inegalitățile triunghiulare, cum se subliniază în soluția noastră.

G.27. *O condiție necesară și suficientă ca un patrulater convex* ABCD *să fie paralelogram, este ca ariile celor 4 triunghiuri* $\Delta_1 = ABC$, $\Delta_2 = ACD$, $\Delta_3 = ABD$, $\Delta_4 = BCD$ *să fie egale.*

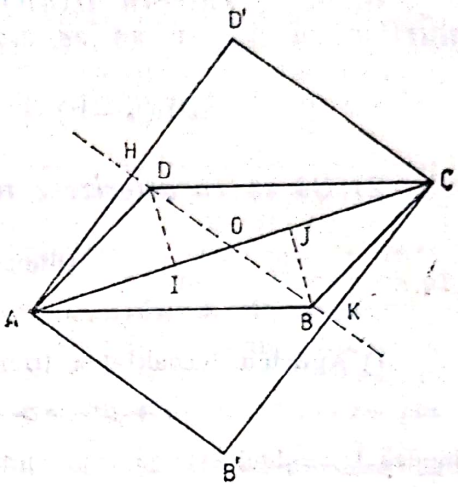
Arhimede, Anul 35, nr. 1–2/1980

Scanned with OKEN Scanner

Soluție : Să notăm cu σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, ariile triunghiurilor Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, și să presupunem că $ABCD$ este, ca în figură, un paralelogram.

Să ducem din A și C perpendiculare pe BD și, de asemenea, paralele la BD. Se va forma un dreptunghi $AB'CD'$ în care BD este linie mediană, întîlnind pe AD' și $B'C$ în H și respectiv K. Vom avea :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} OB \cdot CK + \frac{1}{2} OB \cdot AH = \frac{1}{2} BD \cdot AH,$$



fiindcă diagonalele AC și BD se taie în O în părți de lungimi egale.

Evident, $\sigma_1 = \sigma_2$ fiindcă $\triangle ABC$ și $\triangle ADC$ sînt congruente.

De asemenea, $\sigma_3 = \frac{1}{2} BD \cdot AH$, iar $\sigma_4 = \frac{1}{2} \times$ $\times BD \cdot CK$; $\sigma_3 = \sigma_4$ și, în consecință, $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_1 = \sigma_2$.

Condiția ca ariile să fie egale este necesară. Ea este însă și suficientă.

Să observăm că în dreptunghiul $AB'CD'$, dreapta HK este mediană iar AC, diagonală. Astfel, O va fi mijlocul lui AC. Pe de altă parte, triunghiurile ABC și ADC au ariile σ_1 și σ_2 egale prin ipoteză.

Fie DI și BJ înălțimile respective din D și B. Acestea vor fi de aceeași lungime fiindcă $\frac{1}{2} AC \cdot DI = \frac{1}{2} AC \cdot BJ$. În consecință, triunghiurile dreptunghice DIO și BJO vor fi congruente, de unde $DO=OB$, ceea ce arată că în patrulaterul convex $ABCD$ diagonalele AC și BD se taie în părți de aceeași lungime. Ori, patrulaterul convex ale cărui diagonale au această proprietate este un paralelogram, ceea ce termină demonstrația.

Comentarii : Problema face parte ca lemă pentru stabilirea unei teoreme, care face la rîndul ei obiectul unei probleme în rebista *Arhimede* (același număr). Ea nu este enunțată ca atare, iar demonstrația folosește numai faptul că $AH = CK$ și că în consecință AC este intersectată de BD în mijlocul său O. Pentru a arăta că O este și mijlocul lui BD se repetă construcția cu diagonala BD.

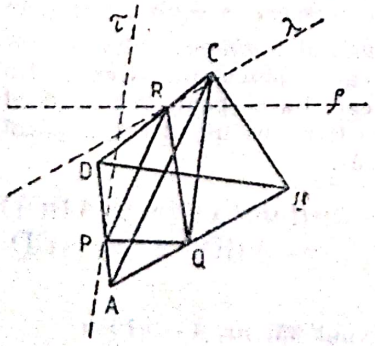
Ceea ce este important este faptul că în demonstrația noastră se folosește numai egalitatea ariilor σ_1 și σ_2 astfel încît teorema din enunț se poate formula astfel :

Condiția necesară și suficientă ca un patrulater convex ABCD *să fie paralelogram este ca ariile triunghiurilor formate cu două laturi adiacente și diagonala opusă să fie egale.*

Această propoziție nu poate rezulta din demonstrația citată, care permută diagonalele.

G.28. *Aria unui patrulater convex* ABCD *este mai mică sau cel mult egală cu dublul ariei maxime a triunghiurilor* PQR *înscrise în el, iar egalitatea are loc dacă și numai dacă* ABCD *este paralelogram.*

Arhimede, Anul 35, nr.1—2/1980



Soluție : Fie Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, triunghiurile ABC, ACD, ABD, BCD în această ordine, și σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, ariile respective.

Să notăm $\mu = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ și $\gamma =$ aria $ABCD$ și fie PQR unul dintre triunghiurile înscrise în $ABCD$ care, fiind convex, laturile lui PQR vor fi în întregime în interiorul patrulaterului, cu excepția vîrfurilor care sînt pe laturile acestuia.

Fie $\sigma =$ aria PQR. Vom arăta că $\sigma \leqslant \mu$, deci că aria PQR este cel mult egală cu maximul μ al ariilor triunghiurilor Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

Scanned with OKEN Scanner

Avem de examinat patru cazuri:

a) cînd P, Q, R sînt chiar vîrfuri ale lui $ABCD$; b) cînd două dintre aceste puncte se găsesc în vîrfurile lui $ABCD$; c) cînd unul dintre acestea este vîrf al lui $ABCD$ și d) cînd niciunul din punctele P, Q, R nu este vîrf al patrulaterului $ABCD$.

Cazul a). Cum $\sigma = \sigma_1$ sau σ_2 sau σ_3 sau σ_4, este evident că:

$$\sigma \leqslant \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \mu.$$

Cazul b). Să presupunem, de exemplu, că P este în A și Q în B. Ducînd prin R o paralelă λ la AB, aceasta va determina două semiplane iar λ va separa pe D și C care vor fi unul într-unul din semiplane, celălalt în cel de-al doilea. Astfel, distanța de la unul din cele două vîrfuri, de exemplu C la AB va fi mai mică decît înălțimea din R a triunghiului RAB, pe cînd distanța de la D la AB va fi mai mare decît această înălțime și vom avea:

$$\text{aria } RAB \leqslant \text{aria } DAB = \sigma_3 \leqslant \mu.$$

Cazul c). Punctul R se găsește într-unul din vîrfurile C sau D, de exemplu, în C. Putem proceda în două moduri pentru a deplasa unul din celelalte două vîrfuri P sau Q. Păstrînd pe Q, unim C cu Q și ducem prin P paralela π la CQ. Aceasta va determina două semiplane și va separa pe D de A, unul dintre acestea va fi la o distanță de CQ mai mare decît celălalt, de exemplu D va avea această proprietate. Vom scrie atunci aria $PCQ \leqslant$ aria DCQ și ne găsim în cazul în care triunghiul DCQ are două vîrfuri în vîrfurile patrulaterului $ABCD$, deci în cazul b), unde

$$\text{aria } PCQ \leqslant \text{aria } DCQ \leqslant \mu.$$

Astfel, am ajuns la concluzia că și în acest caz obținem o arie inferioară sau egală lui μ.

Cazul d). Păstrînd una din laturi fixă, de exemplu PQ, vom duce prin R o paralelă la PQ și aceasta va separa vîrfurile D și C. Deplasînd pe R în vîrful mai îndepărtat de PQ, de exemplu în C, vom avea aria $RPQ \leqslant$ aria CPQ și ne vom găsi în cazul c) astfel încît vom putea spune că

$$\text{aria } RPQ \leqslant \mu.$$

Cu alte cuvinte, în oricare din cazurile considerate vom avea $\sigma \leqslant \mu$.

Astfel, *μ este aria maximă pe care o pot avea triunghiurile înscrise în* ABCD.

Evaluînd aria γ a lui $ABCD$, vom avea:

$$\gamma = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_4.$$

Dacă $\sigma_1 = \sigma_2$, atunci $\gamma = 2\sigma_2 \leqslant 2\mu$ și se verifică prima afirmație din enunț. Dacă $\sigma_1 \neq \sigma_2$ și presupunem $\sigma_1 < \sigma_2$, vom scrie:

$$\gamma = \sigma_1 + \sigma_2 < 2\sigma_2 \leqslant 2\mu, \text{ de unde } \gamma < 2\mu,$$

și *avem o inegalitate strictă*. Deci: *dacă triunghiurile $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ nu au arii egale, aria patrulaterului convex* ABCD *va fi strict mai mică decît dublul maximului μ al acestor arii.*

Dacă $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$, vom avea, pe de o parte:

$$\gamma = 2\sigma_1 = 2\sigma_2 = 2\sigma_3 = 2\sigma_4$$

iar pe de altă parte:

$$\mu = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4.$$

În consecință:

Condiția necesară și suficientă ca aria patrulaterului convex ABCD *să fie egală cu maximul ariei triunghiurilor* PQR *înscrise în el, este ca ariile triunghiurilor formate de laturi cu diagonalele să fie egale.*

Această condiție se traduce în următoarea:

Condiția necesară și suficientă ca aria patrulaterului convex ABCD *să fie egală cu dublul maximului ariilor triunghiurilor înscrise în el, este ca patrulaterul să fie paralelogram.*

Scanned with OKEN Scanner

Comentarii: Problema este inspirată dintr-un articol intitulat *„O proprietate de maxim a elipsei"*, semnat de prof. CARLO PUCCI și publicat în revista *Arhimede*.
Este interesant de observat că demonstrația dată nu stabilește și unicitatea triunghiurilor care asigură maximul μ. Este desigur unul dintre cele 4 triunghiuri Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, dar se pune întrebarea dacă nu mai există și altele.

După cum observă MARIO BASILIO în *Arhimede*, există și triunghiuri diferite de Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 care să aibă aria maximă μ, dacă și numai dacă patrulaterul convex considerat este paralelogram sau trapez.

Demonstrația dată de noi teoremei care formează obiectul problemei urmează în mare calea celei date în revistă, dar aduce precizări pe care le-am considerat necesare.

G.29. *Se consideră triunghiul dreptunghic* ABC, *cu* $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{2}$, *se notează cu* [AH] *înălțimea relativă la ipotenuza acestuia și se duc bisectoarele interioare ale unghiurilor* BAH *și* HAC, *care întîlnesc ipotenuza* [BC], *respectiv în* D *și* E.

a) *Să se demonstreze că triunghiul* ABE *este isoscel, avînd ca bază pe* [AE], *că triunghiul* ACD *este, de asemenea, isoscel, avînd ca bază pe* [AD] *și că are loc relația:*

$$AB + AC = BC + DE; \tag{1}$$

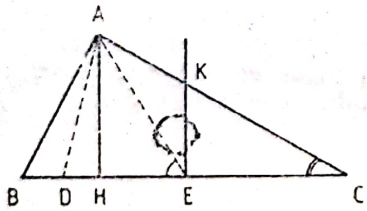
b) *Punînd* $AH = \frac{4}{5}\, l$ *și știind că* $AB = \frac{3}{4}\, AC$, *să se calculeze perimetrul triunghiului* ABC *în funcție de* l:

c) *Să se calculeze volumul solidului obținut prin rotația completă a triunghiului* DAE *în jurul bazei sale* [DE].

d) *Se duce prin* E *o paralelă la* AH, *care întîlnește pe* [AC] *în* K. *Să se calculeze raportul ariilor celor două poligoane în care este împărțit* ABC *prin această paralelă.*

Examen de bacalaureat pedagogic, Arhimede, Anul 35, nr. 3/1980

Soluție: a) Vom arăta că $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BEA})$, de unde va rezulta că ΔABE este isoscel și are ca bază pe $[AE]$. Într-adevăr, $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{ACE})$, unghiurile fiind complementare ambele lui $\widehat{HAC}$, iar $m(\widehat{HAE}) = m(\widehat{EAC})$, fiindcă $[AE]$ este bisectoarea lui $\widehat{HAC}$. În același timp, $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{EAC}) + m(\widehat{ECA})$, ca unghi exterior triunghiului EAC, iar $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BAH}) + m(\widehat{HAE}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{BEA})$, ceea ce voiam să arătăm.



Pentru a pune în evidență că triunghiul ACD este isoscel, de bază $[AB]$, este suficient să arătăm că $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC})$. Ori, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DAH}) + m(\widehat{HAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADC})$, deoarece $[AD]$ este bisectoarea lui $\widehat{BAH}$ și $\widehat{ADC}$ este unghi exterior triunghiului $\widehat{BAD}$. În continuare, vom putea scrie:

$$AB + AC = BE + DC$$

din congruența laturilor $AB = BE$ și $AC = CD$. Dar $BE = BD + DE$, deci $AB + BC = BD + DE + DC = BC + DE$, relația (1) cerută.

Scanned with OKEN Scanner

b) Pentru evaluarea lungimilor laturilor lui ABC în funcție de l, avem nev oie de două relații pentru a putea calcula pe AC și BC.
Una este:

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \tag{2}$$

care exprimă în două moduri aria lui ABC. Introducînd expresiile $AH = \frac{4}{5} l$ și $AB = \frac{3}{4} AC$ ale lui AH și AB în (2), vom obține relația:

$$\frac{3}{4} \cdot AC^2 = \frac{4}{5} \cdot l \cdot BC \tag{2'}$$

Cea de a doua relație pe care o vom folosi este dată de teorema lui PITAGORA în triunghiul ABC:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = BC^2 - \frac{9}{16} AC^2,$$

de unde

$$BC^2 = \frac{25}{16} AC^2 \text{ sau } BC = \frac{5}{4} AC.$$

Revenind la (2'), vom deduce:

$$\frac{3}{4} AC^2 = \frac{4}{5} \cdot l \cdot \frac{5}{4} AC,$$

de unde:

$$AC = \frac{4}{3} l, \; AB = l \text{ și } BC = \frac{5}{3} l, \tag{3}$$

iar perimetrul lui ABC va fi:

$$2p = l + \frac{5}{3} l + \frac{4}{3} l = 4 l, \tag{3'}$$

c) Pentru evaluarea volumului de rotație este necesar să calculăm pe DE.
Din (1) deducem:

$$DE = AB + AC - BC = l + \frac{4}{3} l - \frac{5}{3} l = \frac{2}{3} l, \tag{4}$$

Solidul de rotație este compus din două conuri circulare drepte avînd ca bază comună cercul de rază AH și ca înălțime DH și respectiv HE. Prin ur mare,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} AH^2 (DH + HE) = \frac{\pi}{3} AH^2 \cdot DE = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4}{5} \right)^2 l^2 \cdot \frac{2}{3} l$$

sau

$$V = \frac{32 \pi l^3}{225}. \tag{4}$$

Scanned with OKEN Scanner

d) Pentru a evalua pe EC, vom aplica teorema bisectoarei în triunghiul AHC și vom avea:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{HE}{EC}$$

și aplicînd proprietăți ale rapoartelor egale, obținem

$$\frac{AH + AC}{AC} = \frac{HE + EC}{EC} = \frac{HC}{EC}, \tag{5}$$

Lungimea lui HC se va calcula aplicînd teorema lui PITAGORA triunghiului dreptunghic AHC, care ne va da:

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 = \frac{16}{9} l^2 - \frac{16}{25} l^2 = 16 l^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right) = \frac{16^2}{9 \cdot 25} l^2$$

de unde $HC = \frac{16}{15} l^2$. Introducînd în (5), vom obține pe EC astfel:

$$EC = \frac{AC \cdot HC}{AH + AC} = \frac{\frac{4}{3} l \cdot \frac{16}{15} l}{\frac{4}{5} l + \frac{4}{3} l} = \frac{\frac{16}{3 \cdot 15} l^2}{\frac{8}{15} l} = \frac{2}{3} l. \tag{5'}$$

Triunghiurile ABC și EKC sînt asemenea, iar laturile AC și EC sînt omoloage. Raportul de asemănare va fi $\frac{AC}{EC} = \frac{4}{3} l \cdot \frac{3}{2} l = 2$, deci $AC = 2EC$.

Cum $EC = \frac{1}{2} AC$, aria triunghiului EKC va fi $\frac{1}{4}$ aria ABC. În consecință:

$$\text{aria } ABEK = \frac{3}{4} \text{ aria } ABC,$$

de unde

$$\frac{\text{aria } ABEK}{\text{aria } ECK} = \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 3.$$

Cu alte cuvinte, *aria patrulaterului inscriptibil* ABEK *este de trei ori mai mare decît aria triunghiului* ECK.

Comentarii: Problema face parte din temele date în 1983 în Italia la examenele de bacalaureat din liceele pedagogice (maturità magistrale). Cea de a doua temă este un exercițiu de calcul în baza de numerație 5.

Prezentarea în revista *Arhimede* este însoțită de un comentar semnat STEFANIA ANICHIUS. (Firenze), probabil o profesoară de matematici. Aceasta se indignează constatînd că „încă o dată" se dă o problemă de geometrie elementară la examenul de maturitate pentru institutele magistrale, deci analoge liceelor noastre pedagogice.

Ea găsește inadecvată pregătirea matematică a viitorilor învățători, ținînd seama că, din punct de vedere practic, temele conțin referiri la întregul program actual de învățămînt pedagogic (magistral). Și, ceea ce este mai grav — se plînge semnatara comentariului — este faptul că în majoritatea cazurilor un nou absolvent învățător, pe lîngă că a studiat foarte puțin matematica, nu-și dă seama de cerințele programului și este convins că matematica

este în întregime în acesta, în problemele de geometrie pe care timp de patru ani s-a antrenat să le rezolve. Ce ar putea transmite ei viitorilor lor elevi din școala elementară, se întreabă profesoara, pentru a-i stimula în mod constructiv în domeniul matematicii?

Noi nu sîntem de acord cu aceste aprecieri prin care se critică programul de învățămînt pentru învățători, ca fiind prea elementar, cel puțin în privința geometriei. Problema prezentată în cele ce precedă nu este deloc banală, ci cere la punctele b) și d) o anumită stăpînire a gîndirii geometrice, care nu este la îndemîna oricui.

În plus, problema poate fi generalizată astfel:

1) *Să se construiască un triunghi* ABC, *dreptunghic în* A, *cunoscînd lungimea* [AH] *a înălțimii din* A *și raportul lungimilor catetelor.*

2) *Se duc bisectoarele* [AD] *și* [AE] *ale unghiurilor* $\widehat{BAH}$ *și* $\widehat{HAC}$ *și să se arate că triunghiurile* ABE *și* ACD *sînt isoscele.*

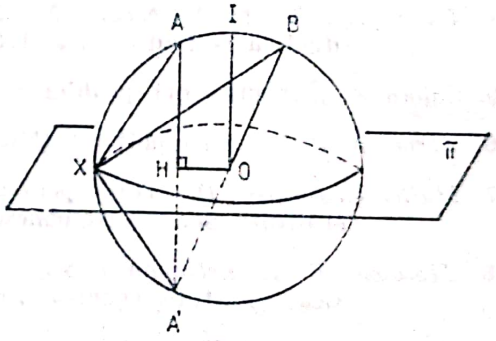
3) *Să se calculeze volumul obținut prin rotația triunghiului* DAE *în jurul lui* DE.

4) *Ducînd prin* E *paralela la* AH *care taie pe* [AC] *în* K, *să se evalueze raportul ariilor celor două figuri în care este împărțit* ABC *prin* KH.

G.30. *Două puncte* A *și* B *ale unei sfere de centru* O *și rază* 1 *sînt unite printr-un arc de cerc mare* $\overset{\frown}{AB}$ *de lungime mai mică decît* 2. *Să se demonstreze că arcul* $\overset{\frown}{AB}$ *trebuie să rămînă într-o emisferă a sferei date.*

The mathematics teacher, vol. 68, nr. 1/1978
(Cea de a treia Olimpiadă matem. din SUA/1974)

Soluție: Ducînd prin AB și O un plan, acesta va fi diametral și arcul $\overset{\frown}{AB}$ va fi cuprins în cercul mare de secțiune în sfera O cu acest plan.



Fie OI bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ și π planul dus prin O perpendicular pe OI. Să luăm simetricul A' al lui A în raport cu π și fie H intersecția lui AA' cu π.

Întrucît $m(\widehat{AOH}) = m(\widehat{A'OH}) = \frac{\pi}{2} - m(\widehat{AOI})$, iar $m(\widehat{AOI}) = m(\widehat{IOB})$, vom avea relația:

$$m(\widehat{A'OH}) + m(\widehat{HOA}) + m(\widehat{AOI}) + m(\widehat{IOB}) = 2m(\widehat{AOH}) + 2m(\widehat{AOI}) =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2} - m(\widehat{AOI})\right) + 2m(\widehat{AOI}) = 180.$$

Prin urmare, punctele A', O și B sînt coliniare, iar $A'B = 2$. Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ ar avea punctele în emisfera inferioară a lui A', ar exista cel puțin un punct $X \in \pi$ și atunci:

$$AX = A'X \text{ și } \overset{\frown}{AX} + \overset{\frown}{XB} \geq AX + XB = A'X + XB.$$

Dar în triunghiul $A'XB$, aplicînd inegalitatea triunghiulară

$$A'X + XB \geq A'B = 2, \text{ de unde } \overset{\frown}{AX} + \overset{\frown}{XB} \geq 2$$

în contradicție cu ipoteza.

Comentarii: Problema este deosebit de instructivă, avînd caracter topologic. Am fi putut stabili același rezultat evaluînd lungimea cercului mare din care face parte arcul $\overset{\frown}{AB}$,

Scanned with OKEN Scanner

care este 2π și a cărui jumătate este π. Un arc $\overset{\frown}{AB}$ de lungime mai mică decît 2 este mai scurt decît un semicerc mare. Atunci am lua ca în soluție bisectoarea OI a unghiului $\widehat{AOB}$ și am avea $\overset{\frown}{AI} = \overset{\frown}{IB} \leqslant 1$.

În aceste condiții, atît A cît și B trebuie să rămînă deasupra planului.

Soluția dată în cele de mai înainte nu folosește măsura arcelor ci numai proprietatea arcelor de a fi mai lungi decît coardele care le subîntind.

Acest gen de soluție este generalizabil la un corp cu simetrie centrală al cărui diametru central minimal este de lungime 2. Dacă două puncte de pe o secțiune centrală cu un plan sînt legate prin arcul de secțiune și acesta este de lungime mai mică decît π, atunci acest arc rămîne în întregime deasupra planului de secțiune perpendicular pe planul arcului considerat.

Demonstrația urmează linia celei date în soluția acestei probleme.

Bibliografie

1. *Cuculescu I.* „Olimpiade internaționale de matematică ale elevilor" (Editura Tehnică, București, 1984).
2. *Cucurezeanu. I.* „Probleme de aritmetică și teoria numerelor" (Editura Tehnică, București, 1976.
3. *Iaglom M. A., Iaglom M. I.* „Probleme neelementare tratate elementar" (Editura Tehnică, București, 1983).
4. *Ion D. Ion, Ghioca A., Nedifă N.* „Manual de algebră pentru clasa a XII-a" (Editura Didactică și Pedagogică, 1981).
5. *Ghioca A.* „Asupra unei probleme de concurs" (Gazeta Matematică nr. 4/1979).
6. *Korovkin P. P.* „Inequalities" (Mir Publishers, Moscow).
7. *Maftei I., Bușneag D.* „Teme pentru cercurile și concursurile de matematică ale elevilor" (Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983).
8. *Morozova E. A., Petrakov I. S., Skvorțev V. A.* „Olimpiadele internaționale de matematică" (Editura Tehnică, București, 1978).
9. *Năstăsescu C., Niță C., Brandiburu M., Joița D.* „Exerciții și probleme de algebră" (Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981).
10. *Panaitopol L., Olteșcu C.* „Probleme date la Olimpiadele de matematică" (Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976).
11. *Pimsner M., Popa S.* „Probleme de geometrie elementară" (Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979).
12. *Polya G.* „Descoperirea în matematică" (Editura Științifică, București, 1971).
13. *Polya G.* „Cum rezolvăm o problemă?" (Editura Științifică, București, 1965).
14. *Polya G.,* „Matematica și raționamente plauzibile" (Editura științifică, București, 1962).
15. *Popescu Dragoș, Oborogeanu George* „Exerciții și probleme de algebră, combinatorică și teoria numerelor" (Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979).
16. Probleme de matematică pentru concurs (traducere din limba maghiară) (Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972).
17. Probleme de matematică traduse din revista sovietică KVANT. Selectarea și traducerea : lector univ. dr. Horea Banea (Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983).

Scanned with OKEN Scanner

18. *Rusu E.* „Problematizare şi probleme în matematica şcolară" (Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978
19. *Rusu E.* „Cum gîndim şi rezolvăm 200 de probleme" (Editura Albatros, 1972).
20. *Acad. N. Teodorescu şi colectiv* „Probleme din Gazeta matematică" Ediţie Selectivă şi metodologică (Editura Tehnică, , Bucureşti, 1984).
21. *Tomescu I.*, „Probleme de combinatorică şi Teoria grafurilor" (Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981).
22. *Colectiv coordonat de Bălinefu D. M., Gheorghiţă V., Maftei I. V., Tomescu I., Ţena M.* „Enunţurile şi soluţiile problemelor date la etapa judeţeană şi etapa pe ţară a concursurilor de matematică pentru licee din anii 1975—1983".
23. *Colectiv coordonat de Uţă M., Calzaili A., Maftei I. V.* „Enunţurile şi soluţiile problemelor date la barajele pentru selecţionarea loturilor lărgite şi echipelor naţionale de matematică din anii 1975—1983".
24. *Colecţia* „Gazeta matematică".
25. *Colecţia* „Revista matematică a elevilor din Timişoara".
26. *Colecţia* „Licăriri" Revistă a elevilor liceului „N. Bălcescu" Craiova.
27. *Colecţia* „Matematika v şkole".
28. *Colecţia* „KVANT".
29. *Colecţii* de reviste străine (v. text sect. C).

D. Probleme date la testul şi, respectiv, concursul de admitere în treptele întîi şi a doua de liceu—iulie 1987; enunţuri şi soluţii, indicaţii sau răspunsuri

Prezentate de ADINA B. IONESCU

În cele ce urmează, ne-am propus să prezentăm unele soluţii, indicaţii sau răspunsuri ale problemelor date în iulie 1987 — ca subiecte unice — la testul şi, respectiv, concursurile de admitere în treptele I şi a II-a de liceu, învăţămînt de zi şi, după caz, învăţămînt seral.

A. *TREAPTA ÎNTÎI*

A.1. *Enunţuri*

I. a) Să se rezolve ecuaţia $\frac{3-x}{x}=2$.

b) Să se rezolve ecuaţia $x(3-x)=2$.

c) Să se arate că, pentru orice x real, are loc inegalitatea $x(3-x)\leqslant\frac{9}{4}$.

d) Să se determine, folosind c), perimetrul triunghiului dreptunghic, de arie maximă, avînd lungimile catetelor x şi $3-x$, unde $0<x<3$.

II. Se consideră polinomul $P(X)=X^4-2X^3+2X^2-X+1$.

a) Să se calculeze $P(1)$ şi $P(-2)$.

b) Să se determine citul şi restul împărţirii lui $P(X)$ la $(X-1)(X+2)$.

c) Să se descompună în factori $P(X)-1$ şi să se arate că, pentru orice a real, avem $P(a)>0$.

III. S3 consideră un trapez isoscel $ABCD$, cu baza mică AB şi laturile neparalele AD şi BC. Se presupune că AB, AD şi BC au aceeaşi lungime, egală cu a, şi că $\widehat{ADC}=\alpha(0<\alpha<90°)$.

a) Să se calculeze perimetrul şi aria trapezului, în funcţie de a şi α.

b) Să se calculeze volumul V al corpului născut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari DC şi să se determine α dacă

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\sin^2\alpha.$$

c) În vîrful A al trapezului se ridică o perpendiculară pe planul trapezului şi, pe aceasta, se consideră un punct E. Se duc $CF\perp AB$ şi $FG\perp BE(F\in AB,\ G\in BE)$. Să se arate că dreapta BE este perpendiculară pe planul (CFG).

A. 2. *Soluţii, indicaţii sau răspunsuri*

I. a) Ecuaţia are sens numai dacă $x\neq 0$. În aceste condiţii, ecuaţia dată este echivalentă cu $3-x=2x$, de unde $3(1-x)=0$, deci $x=1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Efectuînd calculele, găsim $-x^2+3x-2=0$. Cum $\Delta=1-8=1$, obținem $x_1=1$ și $x_2=2$, valori care verifică ecuația dată.

c) Inegalitatea respectivă se mai scrie ca $-x^2+3x-\frac{9}{4}\leqslant 0$, echivalentă cu $\frac{-4x^2+12x-9}{4}\leqslant 0$ sau $-\frac{(2x-3)^2}{4}\leqslant 0$, ultima fiind adevărată pentru orice x real, deoarece $(2x-3)^2\geqslant 0$ pentru orice x real.

d) Lungimile catetelor fiind x și, respectiv, $3-x$ (unde $0<x<3$), aria triunghiului considerat va fi $\frac{x(3-x)}{2}=\frac{9}{8}$; $\left(\text{am ținut seama că } x(3-x)\leqslant\frac{9}{4}, \text{ vezi pct. c)}\right)$. Dar ecuația anterioară admite pe $x=\frac{3}{2}$ ca rădăcină dublă, deci triunghiul respectiv are catetele $x=\frac{3}{2}$, $3-x=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ și ipotenuza $\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, prin urmare perimetrul cerut este $\frac{3(2+\sqrt{2})}{2}$.

II. a) Prin calcul direct, se găsește $P(1)=1$ și $P(-2)=43$.

b) Efectuînd împărțirea lui $P(X)$ la $(X-1)(X+2)=X^2+X-2$, găsim citul $C(X)=X^2-3X+7$ și restul $R(X)=-14X+15$.

c) Avem, succesiv: $P(X)-1=X(X^3-2X^2+2X-1)=X[(X^3-1)-2X(X-1)]=$
$=X(X-1)(X^2-X+1)$.

Ținem seama că $P(a)=a^4-2a^3+a^2+a^2-a+1=a^2(a-1)^2+(a^2-a+1)$. Evident, $a^2\geqslant 0$ și $(a-1)^2\geqslant 0$, pentru orice a real. În continuare, distingem două cazuri: 1) dacă $a\geqslant 1$ sau $a\leqslant -1$, atunci $a^2\geqslant a$, deci $a^2-a\geqslant 0$, prin urmare $a^2-a+1>0$; 2) dacă $-1<a<1$, atunci $1-a>0$, deci $a^2-a+1>a^2\geqslant 0$. Așadar, $a^2-a+1>0$, oricare ar fi a real, deci $P(a)>0$, pentru orice a real.

Notă: Inegalitatea $a^2-a+1>0$ putea fi stabilită și dacă ținem seama că:

$$a^2-a+1=a^2-a+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

și evident, $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$, iar $\frac{3}{4}>0$.

III. a) Fie M piciorul perpendicularei coborîte din A pe DC. Atunci $DM=a\cos\alpha$, deci $DC=a(1+2\cos\alpha)$, prin urmare perimetrul trapezului este $P=2a(2+\cos\alpha)$.

În continuare, ținem seama că $AM=a\sin\alpha$ și găsim

$$\sigma_{[ABCD]}=\frac{a\sin\alpha[a+a(1+2\cos\alpha)]}{2}=a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha).$$

b) Corpul obținut este compus dintr-un cilindru circular drept, avînd raza congruentă cu AM și înălțimea congruentă cu AB, și din două conuri circulare, drepte, fiecare dintre acestea avînd raza bazei congruentă cu AM și înălțimea congruentă cu DM. Prin urmare:

$$V_{corp}=V_{cil}+2V_{con}=\pi a^3\sin^2\alpha+2\frac{\pi a^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3}=\frac{\pi a^3\sin^2\alpha}{3}(2\cos\alpha+3).$$

Din condiția

$$\frac{\pi a^3\sin^2\alpha}{3}(2\cos\alpha+3)=\frac{4\pi a^3}{3}\sin^2\alpha,$$

cum $\sin^2\alpha>0$, deoarece $0<\alpha<90^\circ$, găsim $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, deci $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Fie $BH \perp AF$ ($H \in DC$). Cum $EA \perp (ABCD)$, $AB \subset (ABCD)$ și $AB \perp BH \subset (ABCD)$, rezultă $EB \perp BH$, (1). Pe de altă parte, $BH \| FC$ și $BH \equiv FC$, (2). Din (1) și (2), rezultă că $EB \perp FC$ și, conform ipotezei, $BE \perp FG$, de unde deducem că $BE \perp (CFG)$, fiind perpendiculară pe două drepte conținute în planul respectiv.

B. *TREAPTA A LOUA — învățământ de zi*

B.1. *Enunțuri*

I. 1) Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{4x+c}, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}. \text{ Discuție.}$$

2) Să se determine A și B, în funcție de n, astfel încît

$$(AX^{n+2} + BX^n + 2) \vdots (X-1)$$

și să se calculeze citul.

II. 1) Să se rezolve inecuația:

$$\sqrt{x^2+x} > 2x - 1.$$

2) Să se rezolve și să se discute ecuația:

$$\cos 2x + (2m-1)\sin x + m - 1 = 0, \ m \in \mathbb{R}.$$

III. 1) Să se arate că triunghiul ABC în care $c^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 4S$ este isoscel.

2) În triunghiul ABC, să se arate că:

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,$$

unde m_a este lungimea medianei corespunzătoare laturii a.

3) Dacă $MABCD$ este o piramidă cu baza dreptunghiului $ABCD$, să se arate că:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

B.2. *Soluții, indicații sau răspunsuri*

I. 1) Remarcăm, pentru început, că egalitatea are sens (în $\mathbb{R}$), numai dacă $x + a \geqslant 0$, $x + b \geqslant 0$ și $4x + c \geqslant 0$, adică pentru $x \in [m, +\infty)$, (1) unde $m = \max\left\{-a, -b, -\frac{c}{4}\right\}$.

Întrucît ambii membri ai ecuației sînt pozitivi, ridicăm la pătrat, izolăm radicalul și obținem:

$$2\sqrt{(x+a)(x+b)} = 2x + c - a - b.$$

Pentru a ridica din nou la pătrat, punem condiția $2x + c - a - b \geqslant 0$, de unde $x \geqslant \frac{a+b-c}{2}$, care intersectată cu (1) ne dă

$$x \in [p, +\infty), \text{ unde } p = \max\left\{-a, -b, -\frac{c}{4}, \frac{a+b-c}{2}\right\}. \quad (2)$$

Apoi, procedînd prin ridicare la pătrat, obținem:

$$4x(2a + 2b - c) = (c - a - b)^2 - 4ab. \quad (3)$$

Acum sînt de luat în seamă mai multe situații. Oricum, două mari cazuri se disting:

α) $2a + 2b - c = 0$, de unde $c = 2a + 2b$ care introdusă în (3) ne dă $a = b$. Deci cazul α are două subcazuri:

α_1) dacă $2a + 2b - c = 0$ și $a \neq b$ atunci ecuația este imposibilă.

α_2) dacă $2a + 2b - c = 0$ și $a = b$, adică $a = b$ și $c = 4a$ (am ținut seama de $a = b$ în condiția $2a + 2b - c = 0$), ecuația este satisfăcută de orice x care îndeplinește condiția (2) în care se obține $p = -a$ (am ținut seama de $a = b$ și $c = 4a$).

Deci, dacă $a = b$ și $c = 4a$ ecuația are soluție $x \in [-a, +\infty)$.

β) dacă $2a + 2b - c \neq 0$, atunci găsim

$$x = \frac{(c - a - b)^2 - 4ab}{4(2a + 2b - c)}, \quad (4)$$

valoare care este soluție a ecuației date numai dacă satisface și condiția (2).

Notă: Impunînd condiții suplimentare pentru a, b și c (ca, de exemplu: $a = b$ etc.), din (4) se pot obține diferite expresii ale lui x, dar cerința ca (2) să fie îndeplinită este esențială. Iată un exemplu: în condițiile cazului β), vom presupune, în plus, că $a = b < 0$ și $c = 0$; din (4), găsim $x = 0$, dar $0 \notin [-a, +\infty)$, deoarece $-a > 0$, deci — în situația respectivă — ecuația nu admite soluții.

2) Notăm $P(X) = AX^{n+2} + BX^n + 2$. Din $P(1) = 0$, avem: $A + B + 2 = 0$, deci $B = -A - 2$. Ținînd cont de valoarea lui B în $P(X)$, găsim $P(X) =$

$= (X-1)[AX^n(X+1) - 2(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)]$. Fie $Q(X) = AX^n(X+1) - 2(X^{n-1} + \ldots + X + 1)$. Din condiția $Q(1) = 0$, găsim $A = n$, deci $B = -n-2$. Procedînd la împărțirea lui $P(X)$, cu A și B determinați anterior, la $(X-1)^2$, găsim citul

$$C(X) = nX^n + 2nX^{n-1} + 2(n-1)X^{n-2} + \ldots + 2 \cdot 2X + 2.$$

Notă; La același rezultat se putea ajunge folosind schema lui Horner. De asemenea, soluția putea fi obținută și din condiția ca $P'(1) = 0$, unde cu P' am notat derivata de ordinul întîi a lui P, dar metoda respectivă depășește programa școlară, noțiunea de derivată a unei funcții fiind introdusă în clasa a XI-a de liceu. Am ținut să facem această remarcă tocmai pentru a reține faptul că multe dintre exercițiile existente în manualele școlare din clasele IX și X pot fi rezolvate mult mai simplu dacă se utilizează aparatul Analizei matematice, al cărui studiu se începe în clasa a XI-a.

II.1) Din condiția de existență a radicalului, găsim că $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$.

a) Dacă $2x - 1 < 0$, deci $x < \frac{1}{2}$, atunci inegalitatea este adevărată pentru orice $x \in (-\infty, -1] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

b) Dacă $2x - 1 \geqslant 0$, adică $x \geqslant \frac{1}{2}$, atunci, prin ridicare la pătrat, găsim $-3x^2 + 5x - 1 \geqslant 0$, de unde $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$.

Așadar, inegalitatea este satisfăcută pentru $x \in (-\infty, -1] \cup \left[0, \frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$.

2) Ecuația se mai scrie ca:

$$2\sin^2 x - (2m-1)\sin x - m = 0,$$

de unde, punînd $\sin x = t$, găsim:

$$2t^2 - (2m-1)t - m = 0, \quad t \in [-1, 1].$$

Cum $\Delta = (2m+1)^2 \geqslant 0$, rezultă că ecuația admite rădăcini reale, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

Rădăcinile sînt $t_{1,2} = \frac{2m - 1 \pm (2m+1)}{4}$ de unde $t_1 = -\frac{1}{2}$ și $t_2 = m$.

Rădăcina $t_1 = -\frac{1}{2} \in [-1, 1]$, de unde obținem

$$x_1 \in \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pentru rădăcina t_2 se impune discuție. Se disting două cazuri:

i) dacă $m \in [-1, 1]$, atunci

$$x_2 = \{(-1)^k \arcsin m + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

ii) dacă $m \notin [-1, 1]$, atunci $x_2 \in \emptyset$.

Prin urmare ecuația trigonometrică are soluțiile:

a) dacă $m \in [-1, 1]$, atunci

$$x \in \left\{ (-1)^{k_1+1} \frac{\pi}{6} + k_1\pi, \ k_1 \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{(-1)^{k_2} \arcsin m + k_2\pi, \ k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

b) dacă $m \notin [-1, 1]$, atunci,

$$x \in \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

III. 1) Ținînd cont în egalitatea dată, de relațiile:

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}, \quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde $p = \frac{a+b+c}{2}$, găsim prin calcul direct, că $a = b$, deci ΔABC este isoscel.

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie ABC un triunghi și E piciorul medianei dusă din $A (E \in BC)$. Utilizînd teorema generalizată a lui Pitagora în triunghiurile AEC și AEB, găsim : $b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a \cos(\widehat{AEC})$ și $c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - am_a \cos(\widehat{AEB})$. Cum $\cos(\widehat{AEC}) = -\cos(\widehat{AEB})$, sumînd membru cu membru cele două egalități, obținem egalitatea cerută.

3) Fie O punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului $ABCD$. MO este mediană în ΔAMC, deci :

$$4MO^2 = 2(MA^2 + MC^2) - AC^2. \tag{1}$$

Analog, din ΔBMD, avem :

$$4MO^2 = 2(MB^2 + MD^2) - BD^2. \tag{2}$$

Cum $AC = BD$, din (1) și (2) rezultă egalitatea cerută.

C. *TREAPTA A DOUA — învățămînt seral*

C.1. *Enunțuri*

I. Să se rezolve ecuațiile :

1) $x(x-9) = 0$;

2) $3^{\sqrt{x-2}} = 9$;

3) $\log_2(x+1) = \log_2(x^2+3)$.

II.1) Să se determine m, astfel încît :

$$x - 1 \mid x^4 + mx^2 + 1, \quad m \in \mathbb{R}$$

și să se afle citul împărțirii.

2) Să se rezolve ecuația :

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

III. Într-un triunghi dreptunghic, cateta care se opune unghiului de 30° este de 5 cm. Să se afle :

a) perimetrul triunghiului ;

b) înălțimea corespunzătoare ipotenuzei ;

c) aria triunghiului.

C.2. *Soluții, indicații sau răspunsuri*

I.1) $x = 0$ și $x = 9$.

2) Ecuația are sens numai dacă $x \geqslant 2$. Ținem cont că $9 = 3^2$, deci $\sqrt{x-2} = 2$, de unde soluția $x = 6$.

3) Ecuația are sens numai dacă $x > -1$. Cum logaritmii din cei doi membri au aceeași bază, din egalitatea respectivă rezultă $x + 1 = x^2 + 3$, care însă nu este verificată de nici o valoare reală x.

II. 1) Notînd $P(x) = x^4 + mx + 1$, din condiția $P(1) = 0$ găsim $m = -2$.

Cum $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 = (x-1)(x+1)(x^2-1)$, citul căutat este $(x+1)(x^2-1)$.

2) $x \in \left\{ 2k\pi \pm \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

III.a) Fie ABC un triunghi dreptunghic ($\hat{A} = 90°$) cu $\widehat{ABC} = 30°$. Cum $\sin 30° = \frac{1}{2}$ și $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{5}{BC}$, găsim $BC = 10$ cm. Analog se găsește AB, deci perimetrul triunghiului este de $5(3+\sqrt{3})$ cm.

b) Ținem seama că $AB \cdot AC = CB \cdot AD$, deci $AD = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

c) $\sigma_{[ABC]} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

A. SUBIECTE DATE LA PROBA DE VERIFICARE PENTRU ÎNSCRIEREA ÎN TREAPTA I DE LICEU 5

B. TEME PENTRU CERCURILE DE ELEVI (MATEMATICA GIMNAZIALĂ DINCOLO DE MANUAL) 43

CAPITOL PRELIMINAR: Metodologii intuitive fundamentale în rezolvarea problemelor matematice 45

CAPITOLUL I: Principiul cutiei 53

CAPITOLUL II: Pătrate perfecte 69

CAPITOLUL III: Media aritmetică. Media geometrică . . . 80

CAPITOLUL IV: Probleme de ordonare 100

CAPITOLUL V: Probleme de numărare 110

CAPITOLUL VI: Sume. Produse 125

CAPITOLUL VII: Probleme care implică noţiunea de paritate 142

CAPITOLUL VIII: Mulţimi. Partiţii ale unei mulţimi . . . 154

CAPITOLUL IX: Cîteva probleme de sinteză 163

C. PROBLEME COMENTATE DIN REVISTE STRĂINE . . . 173

CAPITOLUL I: Algebră 175

CAPITOLUL II: Geometrie 207

D. PROBLEME DATE LA TESTUL ŞI, RESPECTIV, CONCURSUL DE ADMITERE ÎN TREPTELE I ŞI A II-a DE LICEU, IULIE 1987. 243

Scanned with OKEN Scanner